



Gonçalo de Sousa Bandeira Gulbenkian

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Optimização de topologia de estruturas
aplicada a guardas de segurança
rodoviária**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Co-orientador: Mestre Rui Filipe Monteiro da Silva

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira
Arguente: Prof. Doutor João M. Burguete Botelho Cardoso
Vogais: Prof. Doutor Pedro S. Gonçalves Coelho
Mestre Rui Filipe Monteiro da Silva



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro 2011

Copyright

Optimização topológica de estruturas aplicada a guardas de segurança rodoviária.

Copyright © 2011 Gonçalo de Sousa Bandeira Gulbenkian, Faculdade Ciências e Tecnologia,
Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpetuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua copia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Quero agradecer ao meu orientador, o Professor Pedro Coelho, pela ajuda e enorme disponibilidade ao longo de todo este trabalho. Quero também agradecer por todos os conhecimentos transmitidos pelo meu orientador no que diz respeito à optimização topológica de estruturas.

Ao meu co-orientador, o Mestre Rui Silva, que foi uma ajuda preciosa na recolha de informações sobre a forma mais adequada para modelar a guarda de segurança assim como o carregamento que simula impacto do veículo.

Quero também agradecer aos meus pais por todo o apoio dado ao longo desta dissertação e de todo o meu percurso académico.

Por fim quero também agradecer ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI) da Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT) por disponibilizar as instalações e equipamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

A presente dissertação tem como objectivo a obtenção de um novo perfil para as guardas de segurança rodoviária cuja distribuição de material proporcione a maior rigidez possível para uma dada quantidade de material disponível e carregamento aplicado.

Para o conseguir, começa-se por construir um modelo em elementos finitos da guarda de segurança mais utilizada actualmente em Portugal, perfil em *W*. Leva-se em consideração a rigidez do solo e efectua-se a análise para determinar a resposta da guarda de segurança à aplicação de um carregamento equivalente ao provocado pelo impacto de um veículo de 2000 kg a 100 km/h de forma a estar de acordo com o documento NCHRP 350. De forma a simplificar a análise, o carregamento foi considerado como sendo estaticamente aplicado.

Uma vez concluída esta fase, procede-se à adaptação de um código de optimização topológica escrito em FORTRAN que minimiza a flexibilidade (*compliance*) de estruturas tridimensionais sujeitas a um constrangimento de volume para que este produza perfis de secção transversal constante ao longo do comprimento. O código modificado é então usado para resolver um problema de distribuição de material dentro de um domínio de projecto prismático recto com dimensões exteriores e carregamento aplicado idênticos aos usados previamente na análise da guarda de segurança em *W*. De forma a diminuir o custo computacional da análise considera-se o encastramento dos prumos ao solo. Finalmente, o perfil optimizado é comparado a nível do comportamento estrutural com um perfil em *W* possuindo a mesma fracção volúmica.

Palavras-chave:

Guarda de segurança rodoviária, maximização da rigidez, minimização da flexibilidade, energia de deformação, optimização topológica de perfis

Abstract

The main goal of this thesis is to obtain a new cross-section design for the roadside barriers which maximizes stiffness for a given quantity of material and applied loads.

To accomplish this goal, a finite element model of the most common roadside barrier in Portugal, the W-beam rail, is created and studied taking into account the soil's stiffness. The impact simulated on this dissertation is chosen so that it respects the NCHRP 350. For simplification of the analysis, the effects of a 2000 kg vehicle crashing into a W-beam rail at a speed of 100 km/h are applied statically.

After the W-beam rail analysis, a FORTRAN code that minimizes the compliance, and thus increases the stiffness, of tridimensional structures subjected to a volume constraint is modified so that it produces structures with constant cross section through all the length of the design domain. This modified code is then used to solve a material distribution problem inside a prismatic design domain with the same outer dimensions and applied loads of the W-beam previously analyzed. To reduce the computational cost, the soil stiffness is considered as infinite. Finally, the structural response of the optimized beam is compared with a W-beam having the same volume fraction.

Keywords:

Roadside barrier, stiffness maximization, compliance minimization, strain energy, topology optimization of profiles

Índice de Matérias

<i>Copyright</i>	I
Agradecimentos	III
Resumo	V
<i>Abstract</i>	VII
Índice de matérias	IX
Índice de figuras	XIII
Índice de tabelas	XIX
Simbologias e notações	XXI
Capítulo 1 – Introdução	1
1.1. Objectivo.....	4
1.2. Estrutura da dissertação.....	5
Capítulo 2 – Guarda de segurança rodoviária em Portugal	7
2.1. Descrição da guarda de segurança em W.....	7
2.2. Dimensões dos componentes	8
2.2.1. Ecrã.....	9
2.2.2. Absorçor.....	9
2.2.3. Prumos.....	10
2.2.4. Parafusos.....	10
2.3. Materiais dos componentes.....	11
	IX

Capítulo 3 – Modelação em elementos finitos

de uma guarda de segurança rodoviária em W.....	13
3.1. NCHRP Report 350.....	14
3.2. Comprimento da guarda de segurança a modelar.....	15
3.3. Modelação das ligações aparafusadas.....	16
3.4. Modelação da interacção entre o prumo e o solo.....	18
3.4.1. Modelo de Ala Tabiei e Jin Wu.....	18
3.4.2. Modelo de Plaxico.....	21
3.5. Construção do modelo da guarda de segurança.....	23
3.5.1. Comprimento modelado.....	23
3.5.2. Modelação dos componentes.....	24
3.5.2.1. Prumos.....	24
3.5.2.2. Ecrã, absorçor e ligações aparafusadas.....	26
3.5.2.3. Modelação do solo.....	28
3.5.2.4. Apresentação do modelo.....	29
3.5.3. Modelo de material.....	30
3.5.4. Carregamento aplicado.....	31

Capítulo 4 – Resultados da análise

de uma guarda de segurança rodoviária em W.....	35
4.1. Caso de carga 1.....	35
4.2. Caso de carga 2.....	37
4.3. Caso de carga 3.....	39
4.4. Caso de carga 4.....	40
4.5. Análise de resultados.....	42

Capítulo 5 – Optimização topológica de estruturas.....

5.1. Formulação do problema de optimização.....	44
5.1.1. Caso de carga singular.....	44
5.1.2. Múltiplos casos de carga.....	49
5.1.3. Pontos de não <i>design</i>	51
5.2. Sensibilidades e algoritmo de optimização.....	52
5.2.1. Calculo das sensibilidades.....	52
5.2.2. Função de Lagrange.....	55
5.2.3. Algoritmo de solução dual.....	57

5.2.4. Condições de óptimo.....	58
5.2.5. Critério de optimalidade.....	59
5.2.6. Método das asymptotas móveis (MMA).....	61
5.3. Filtro das sensibilidades.....	65
Capítulo 6 – Optimização topológica de perfis com secção transversal uniforme.....	69
6.1. Método	69
6.2. Formulação do problema.....	71
6.3. Formulação multicarga.....	75
6.4. Algoritmo	76
Capítulo 7 – Perfis de secção transversal uniforme - Estudos de caso.....	79
7.1. Distribuição de densidade inicial uniforme.....	79
7.1.1. Viga em consola com carga concentrada.....	80
7.1.2. Viga em consola sujeita a um momento torsor.....	85
7.1.3. Viga em consola com carga distribuída.....	89
7.2. Efeito de diferentes distribuições de densidades inicial não uniforme.....	92
7.3. Elementos de não <i>design</i>	96
7.3.1. Resultados 2D.....	96
7.3.2. Resultados 3D.....	99
Capítulo 8 – Optimização da topologia de uma guarda de segurança.....	103
8.1. Modelo.....	104
8.2. Perfil optimizado.....	107
8.3. Comparação entre o perfil em <i>W</i> e o perfil optimizado.....	110
Capítulo 9 – Conclusões e desenvolvimentos futuros.....	119
Bibliografia.....	123
Anexo A.....	127

Índice de Figuras

Capítulo 1

Figura 1.1:	Modelação da parte frontal de um automóvel com 272 elementos de viga [4].....	3
Figura 1.2:	Ilustração gráfica do problema de minimização do erro entre a aceleração real e máxima permitida assim como a optimização da parte frontal de um automóvel [4].....	4

Capítulo 2

Figura 2.1	Guarda de segurança em W utilizada em Portugal e França, a) Vista frontal, b) Alçado [10].....	8
Figura 2.2	Dimensões do ecrã em mm [9].....	9
Figura 2.3	Dimensões do absorçor em mm [9].....	10
Figura 2.4	Dimensões do prumo em mm [9].....	10
Figura 2.5	Dimensões dos parafusos em mm a) Ligação absorçor – prumo e absorçor – ecrã b) ligação ecrã – ecrã ecrã [9].....	11

Capítulo 3

Figura 3.1	Teste de uma guarda de segurança de acordo com o NCHRP <i>Report</i> 350 [11].....	15
Figura 3.2	Comprimento não modelado L de uma guarda de segurança.....	16
Figura 3.3	Modelação detalhada do parafuso [8].....	17
Figura 3.4	Cedência do solo após impacto de um automóvel com uma guarda de segurança [16].....	18
Figura 3.5	Reacções do solo sobre o prumo.....	19

Figura 3.6	Modelação do solo segundo Ala Tabiei e Jin Wu [8].....	19
Figura 3.7	Modelação da ligação solo - prumo para a obtenção das curvas de rigidez das molas não lineares [8].....	20
Figura 3.8	Disposição das molas não lineares segundo Plaxicco [18].....	21
Figura 3.9	Curvas de rigidez das molas perpendiculares ao ecrã da guarda de segurança [19].....	22
Figura 3.10	Curvas de rigidez das molas paralelas ao ecrã da guarda de segurança [19].....	22
Figura 3.11	Choque entre veículo e guarda de segurança [11].....	24
Figura 3.12	Graus de liberdade do elemento <i>BEAM4</i>	25
Figura 3.13	Vista de topo da secção transversal do prumo e eixos segundo os quais foram calculados os momentos de inércia [10].....	25
Figura 3.14	Graus de liberdade do elemento <i>SHELL181</i>	26
Figura 3.15	Nós de ligação entre os prumos e o ecrã, a) vista em perspectiva, b) alçado esquerdo.....	27
Figura 3.16	Graus de liberdade do elemento <i>COMBIN14</i> para uma mola axial.....	27
Figura 3.17	Distribuição das molas lineares e condições de fronteira.....	28
Figura 3.18	Modelo em elementos finitos da guarda de segurança em <i>W</i> visto em perspectiva.....	29
Figura 3.19	Alçado direito do modelo em elementos finitos da guarda de segurança em <i>W</i>	29
Figura 3.20	Vista frontal do modelo em elementos finitos da guarda de segurança em <i>W</i>	30
Figura 3.21	Aproximação da curva tensão – extensão do aço S235JR.....	30
Figura 3.22	Acelerações longitudinais no centro de gravidade do veículo [11].....	31
Figura 3.23	Vista de topo da aplicação dos casos de carga na guarda de segurança.....	32
Figura 3.24	Aplicação das forças a) vista frontal b) em perspectiva.....	33
Figura 3.25	Vista em perspectiva dos quatro casos de carga aplicados na guarda de segurança rodoviária em <i>W</i>	33

Capítulo 4

Figura 4.1	Deslocamentos provocados pelo caso de carga 1.....	36
Figura 4.2	Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 1.....	36

Figura 4.3	Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 1.....	37
Figura 4.4	Deslocamentos provocados pelo caso de carga 2.....	37
Figura 4.5	Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 2.....	38
Figura 4.6:	Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 2.....	38
Figura 4.7	Deslocamentos provocados pelo caso de carga 3.....	39
Figura 4.8	Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 3.....	39
Figura 4.9	Tensões de Von Mises provocadas Pelo caso de carga 3.....	40
Figura 4.10	Deslocamentos provocados pelo caso de carga 4.....	40
Figura 4.11	Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 4.....	41
Figura 4.12	Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 4.....	41

Capítulo 5

Figura 5.1	Optimização topológica de uma viga em consola .a) domínio de projecto b) estrutura óptima.....	44
Figura 5.2	Domínio de projecto [6].....	45
Figura 5.3	Exemplo de optimização topológica com dois casos de carga: a) domínio de projecto e condições de fronteira, b) caso de carga único e c) com dois casos de carga.....	50
Figura 5.4	Exemplo de optimização topológica com pontos de não design: a) pontos de não <i>design</i> de densidade 1 (a preto), b) pontos de não <i>design</i> de densidade 0.01 (a branco).....	52
Figura 5.5	Exemplo do aparecimento de microestruturas devidas a um refinamento excessivo da malha: a) 2700 elementos, b) 4800 elementos, c) 17200 elementos. [6].....	65
Figura 5.6	Exemplo do problema do <i>checkerboard</i> : a) domínio de projecto, b) resultado [6].....	66
Figura 5.7	Efeito do filtro de sensibilidades sobre o <i>checkerboard</i> : [6].....	66
Figura 5.8	Efeito do filtro de sensibilidades sobre a dependência da malha: a) domínio de projecto e condições de fronteira, discretizado por b) 300 elementos, c) 1200 elementos, d) 10800 elementos.....	67

Capítulo 6

Figura 6.1	Domínio de projecto discretizado por $20 \times 40 \times 40$ elementos.....	70
Figura 6.2	Tira de 20 elementos ao longo de X com densidade ρ	71
Figura 6.3	Fluxograma do algoritmo que utiliza o MMA.....	77

Capítulo 7

Figura 7.1	Vista em perspectiva da viga em consola com carga concentrada.....	80
Figura 7.2	Vista frontal Vista em perspectiva da viga em consola com carga concentrada.....	80
Figura 7.3	Alçado esquerdo da viga em consola com carga concentrada.....	81
Figura 7.4	Distribuição de tensões normais na secção transversal da viga.....	82
Figura 7.5	Distribuição de tensões tangenciais na secção transversal da viga.....	82
Figura 7.6	Distribuição de densidades na secção transversal da viga em consola com carga concentrada.....	83
Figura 7.7	Vista de perfil dos elementos com densidades superiores a 0.9.....	84
Figura 7.8	Percentagem de violação do constrangimento.....	84
Figura 7.9	Variação da <i>compliance</i>	85
Figura 7.10	Condições de fronteira do segundo caso.....	86
Figura 7.11	Distribuição de densidades na secção transversal.....	87
Figura 7.12	Vista de perfil dos elementos com densidades superiores a 0.9.....	87
Figura 7.13	Percentagem de violação do constrangimento.....	88
Figura 7.14	Variação da <i>compliance</i> em função da iteração do 2º caso.....	89
Figura 7.15	Alçado esquerdo.....	89
Figura 7.16	Vista em perspectiva das condições de fronteira.....	90
Figura 7.17	Vista frontal.....	90
Figura 7.18	Distribuição de densidades na secção transversal do terceiro caso.....	91
Figura 7.19	Vista de perfil dos elementos com densidades superiores a 0.9 do terceiro caso.....	92
Figura 7.20	Percentagem de violação do constrangimento de volume.....	92
Figura 7.21	Variação da <i>compliance</i>	93

Figura 7.22	Resultados obtidos sem filtro e com filtro, a) Domínio de projecto, b) Matlab com critério de optimalidade sem filtro, c) FORTRAN com MMA sem filtro, d) Matlab com critério de optimalidade com filtro de sensibilidades, e) FORTRAN com MMA com filtro de sensibilidades.....	97
Figura 7.23	Resultados obtidos sem filtro e com filtro, a) Domínio de projecto, b) Matlab com critério de optimalidade sem filtro, c) FORTRAN com MMA sem filtro, d) Matlab com critério de optimalidade com filtro de sensibilidades, e) FORTRAN com MMA com filtro de sensibilidades.....	98
Figura 7.24	Resultados para o caso 2, a) sem filtro de sensibilidades, b) com filtro de sensibilidades, c) com filtro de sensibilidades e media das densidades calculada.....	101

Capítulo 8

Figura 8.1	Dimensões da secção transversal do domínio de projecto.....	104
Figura 8.2	Modelo usado na optimização.....	105
Figura 8.3	Aplicação dos quatro casos de carga no modelo.....	106
Figura 8.4	Nós de ligação entre o domínio de projecto e os prumos.....	107
Figura 8.5	Variação da <i>compliance</i> ao longo das iterações.....	108
Figura 8.6	Variação da percentagem de violação do constrangimento de volume ao longo das iterações.....	108
Figura 8.7	Resultados obtidos após optimização: a) antes de correcção do valor das densidades com a média das densidades calculada no ANSYS, b) antes de correcção das densidades, c) com correcção das densidades.....	109
Figura 8.8	Perfil em <i>W</i> no domínio de projecto.....	110
Figura 8.9	Secções transversais do perfil optimizado e em <i>W</i> com as respectivas molas.....	111
Figura 8.10	Deslocamentos máximos provocados pelos quatro casos de carga no ecrã em <i>W</i> (factor de escala de 30).....	112
Figura 8.11	Deformação do ecrã em <i>W</i> causada pelo caso de carga 2 (factor de escala de 10).....	112

Figura 8.12	Deslocamentos máximos provocados pelos quatro casos de carga no ecrã optimizado (factor de escala de 30).....	113
Figura 8.13	Deformação do ecrã optimizado causada pelo caso de carga 2 (factor de escala de 10).....	113
Figura 8.14	Secções transversais e eixos de inércia no centroide do perfil a) em W, b) após optimização.....	115

Índice de Tabelas

Capítulo 2

Tabela 2.1	Propriedades do aço S235JR [14].....	11
-------------------	--------------------------------------	----

Capítulo 3

Tabela 3.1	Número de elementos usados para o estudo da guarda de segurança em W	30
Tabela 3.2	Casos de carga do impacto entre a guarda de segurança e o veículo.....	32

Capítulo 4

Tabela 4.1	Resultados de deslocamento, tensão e extensão para cada caso de carga do impacto entre a guarda de segurança e o veículo.....	42
-------------------	--	----

Capítulo 7

Tabela 7.1	Influência de diferentes distribuições iniciais de densidades no resultado final.....	95
Tabela 7.2	Influência de pontos de não <i>design</i> no resultado final.....	100

Capítulo 8

Tabela 8.1	Deslocamentos máximos [m] nas guardas de segurança com ecrã em W e otimizado.....	114
-------------------	--	-----

Tabela 8.2	Flexibilidade [J] dos ecrãs das guardas de segurança em <i>W</i> e otimizada.....	114
Tabela 8.3	Propriedades geométricas do perfil em <i>W</i> e otimizado.....	115
Tabela 8.4	Flexibilidade [J] dos ecrãs das guardas de segurança em <i>W</i> e otimizado desseleccionando os elementos ligados e vizinhos dos prumos.....	116
Tabela 8.5	Flexibilidade [J] das guardas de segurança com ecrã em <i>W</i> e otimizado.....	117

Simbologia e notações

Latim

A	Área da secção transversal
a	Aceleração
B	Largura do prumo
b_e	Espessura do elemento de viga
B_k	Variável usada para otimizar as densidades no critério de optimalidade
c	Flexibilidade, <i>compliance</i>
d	Utilizado como expoente para indicar que se tratam de pontos de <i>design</i>
\bar{d}	Deflexão do prumo
E	Modulo de Young
e	Elemento, também utilizado como índice para referir um elemento
E_{deform}	Energia de deformação
E_{ijkl}, \mathbf{E}	Tensor de rigidez
E_{ijkl}^0, \mathbf{E}^0	Tensor de rigidez do material isotrópico de base
F, \mathbf{f}	Carga
f	Peso próprio
F_d	Carregamento distribuído
F_V	Fracção volúmica
$f(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}),$	Função objectivo
$g_j(\mathbf{x})$	Função do constrangimento j
h_e, \mathbf{h}	Altura do elemento de viga
\widehat{H}_i	Operador de convulsão
h_{max}	Valor máximo admissível para a altura do elemento de viga
h_{min}	Valor mínimo admissível para a altura do elemento de viga
I_x, I_y, I_z	Momentos de inércia segundo x, y e z
K	Rigidez das molas
\mathbf{K}	Matriz de rigidez

k	Utilizado com expoente para indicar o número da iteração
K_h	Rigidez das molas segundo Plaxicco
L	Comprimento não modelado
$\ell(\Lambda)$	Função dual
ℓ_1, ℓ_2	Constantes de Lamé
l_e	Comprimento do elemento de viga
L_i	Limite inferior de uma assíptota
M	Número de casos de carga
m	Número de constrangimentos
m	Massa
N	Número total de elementos
n_n	Número de nós
N_q	Capacidade de rolamento lateral do solo
NET	Número de elementos de uma tira
NT	Número total de tiras
p	Expoente de penalização no modelo SIMP
Q	Parâmetro adimensional utilizado por Plaxicco
R	Reacções das molas
r	Equilíbrio dinâmico num impacto
r	Raio, também utilizado como índice para indicar grandezas “reais”
ROT	Rotação de um nó
r_{min}	Raio de filtragem
r_i	Variável utilizada pelo MMA
s_i	Variável utilizada pelo MMA
t	Forças distribuída
t	Tempo
$u, \mathbf{u}, \mathbf{U}$	Deslocamentos
U_i	Limite superior de uma assíptota
\ddot{u}_m	Aceleração real
\ddot{u}_m^*	Aceleração máxima pretendida
v	Utilizado como índice para indicar grandezas “virtuais”
$V_{estrutura}$	Volume da estrutura final
V_{maximo}	Volume máximo possível para a estrutura
vol	Volume
w	Peso da força
W_{Fext}	Trabalho virtual provocado por forças exteriores

W_{Fint}	Trabalho virtual provocado por forças interiores
\mathbf{x}	Variáveis de projecto
\mathbf{x}^*	Variáveis de projecto óptimas
XYZ	Sistema de eixos
Z	Cota de uma mola
z	distancia em relação à linha neutra segundo ZZ
ϖ	Constante que permite definir a existência/ausência de material

Grego

$\Lambda, \Lambda^+, \Lambda^-$	Multiplicador de Lagrange
Λ^*	Multiplicador de Lagrange no ponto óptimo
λ	Variável auxiliar
\mathcal{L}	Função de Lagrange
ν^0	Coefficiente de Poisson do material isotrópico de base
$\rho, \boldsymbol{\rho}$	Densidade
ρ_{min}	Densidade mínima
\emptyset	Ângulo de torção
$\varepsilon_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das extensões
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tensor das deformações médias
$\sigma_{ij}, \boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões
Ω	Volume do domínio de projecto
σ_e	Tensão efectiva
Γ	Raio
Γ_T	Fronteira onde é imposto um carregamento
Γ_U	Fronteira onde são impostos deslocamentos
δ	Flecha de uma viga
δ_{ik}	Delta de Kronecker
$\delta\Omega$	Volume de um elemento do domínio de projecto
ζ	Constante utilizada no critério de optimalidade
η	Constante utilizada no critério de optimalidade
ϖ	Constante que permite definir a existência/ausência de material

Abreviaturas

EF	Elementos finitos
KKT	Condições de Karush-Kuhn-Tucker
MEF	Método dos elementos finitos
MMA	Método das assimptotas móveis
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalisation
NCHRP	<i>National Cooperative Highway Research Program</i>

Capítulo 1

Introdução

Os acidentes rodoviários podem ser divididos em três tipos: colisão, atropelamento e despiste. O termo colisão é empregue quando um veículo embate contra uma viatura, um obstáculo (por exemplo: guardas de segurança e lancis) e peões (atropelamento). Um despiste ocorre quando as capacidades dinâmicas de um veículo são ultrapassadas potenciando a hipótese de ocorrência de uma colisão. A ultrapassagem das capacidades dinâmicas de uma viatura é provocada por excessos do condutor e/ou problemas mecânicos. A partir de determinados valores de acelerações, uma colisão pode ter consequências graves a nível corporal, provocando ferimentos graves ou mesmo fatais nos ocupantes. Nesta dissertação, os atropelamentos não serão alvo de estudo.

De forma a diminuir o número de mortes e feridos graves causados por acidente rodoviário os fabricantes de automóveis e a própria legislação começaram a implementar, ou a exigir no caso da legislação, que os veículos viessem equipados com sistemas de segurança que diminuam as acelerações aplicadas nos ocupantes durante um embate. Isto fez com que nascesse um novo campo de estudos, ao qual se deu o nome de *crashworthiness*, que analisa a capacidade de uma estrutura em proteger os seus ocupantes durante um impacto. Os estudos nesta área são responsáveis por tecnologias como o *airbag* e estruturas concebidas para deformarem-se de forma progressiva em caso de embate.

De forma a compilar um grande número de artigos científicos sobre *crashworthiness* foi lançado o *International Journal of Crashworthiness*. Neste são também publicados para além dos artigos sobre *crashworthiness* artigos sobre a resposta do corpo humano a vários tipos de impactos.

Uma vez que se pretende estudar a resposta de estruturas durante um embate para que estas tenham o melhor comportamento ao impacto possível, podem utilizar-se técnicas de optimização para o efeito.

Os problemas de optimização em *crashworthiness* levam em conta os dois factores responsáveis pelas lesões causadas por um impacto: a desaceleração e a deformação do veículo. Tendo em conta que a optimização dimensional e a optimização de forma produzem resultados sem alterar a topologia inicial da estrutura, uma técnica que pode melhorar a eficiência das estruturas é a optimização de topologia. Um exemplo de uma marca de automóveis que utiliza tal ferramenta é a *Ford Motor Company* que desenvolveu um programa de optimização topológica baseado no programa computacional RADIOSS para conceber veículos com um melhor comportamento ao impacto [1].

No entanto há que referir que de acordo com [2,3,4,5], os problemas de optimização envolvendo *crashworthiness* são de difícil resolução já que as geometrias envolvidas são muito complexas, existe comportamento não linear dos materiais, as forças aplicadas sobre o veículo são desconhecidas e a análise de sensibilidades (derivada da função objectivo em ordem a variável de projecto) é difícil de efectuar [6]. Mesmo ultrapassando estas dificuldades o problema de optimização topológica obtido é de tal forma complexo que exige vinte e quatro a trinta horas para ser resolvido num super computador [6]. Tudo isto explica o desafio da aplicação da optimização de topologia de estruturas em problemas de *crashworthiness* [6].

Uma formulação típica de problemas de *crashworthiness* é feita limitando a desaceleração e deformação máxima sofridas pelo veículo durante o embate. A desaceleração máxima em função do tempo não deve ser tal que o *Head Injury Criterion* seja superior a 1000 num intervalo de 36 ms (HIC36) [7] pois esta dá origem a forças elevadas aumentando a probabilidade de ocorrerem lesões na cabeça dos ocupantes [4]. A deformação máxima que o veículo pode sofrer também deve ser controlada de forma a evitar que o motor e/ou outros componentes invadam o habitáculo. Estes dois factores (desaceleração e deformação) entram em conflito um com o outro visto que ao diminuir a deformação da estrutura (i.e, maximizar a rigidez) aumentam as forças dinâmicas sobre os ocupantes (ou seja maior desaceleração). Modelando a secção frontal de um automóvel através de um conjunto de elementos finitos de

viga, pode formular-se o problema de optimização como sendo a minimização do erro entre a desaceleração real \ddot{u}_m e a desaceleração máxima permitida \ddot{u}_m^* em M pontos de projecto [4]:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{h}} \quad & \max_{m=1,2,\dots,M} |\ddot{u}_m(\mathbf{h}) - \ddot{u}_m^*| \\
 \text{s. a:} \quad & \mathbf{r}(t, \mathbf{h}) = 0, \\
 & \sum_{e=1}^N h_e b_e l_e \leq V \\
 & 0 < h_{\min} \leq h_e \leq h_{\max}, \quad e = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde b_e é a espessura do elemento e , l_e é o comprimento do elemento, h_e é a variável de projecto e representa a altura do elemento e $\mathbf{r}(t, \mathbf{h})$ representa o equilíbrio dinâmico em que t é o tempo do impacto. Na Figura 1.1 é possível ver a modelação da parte da frente de um automóvel e na Figura 1.2 um gráfico que ilustra a ideia da minimização do erro entre a aceleração real e a aceleração máxima permitida bem como a secção frontal optimizada [4].

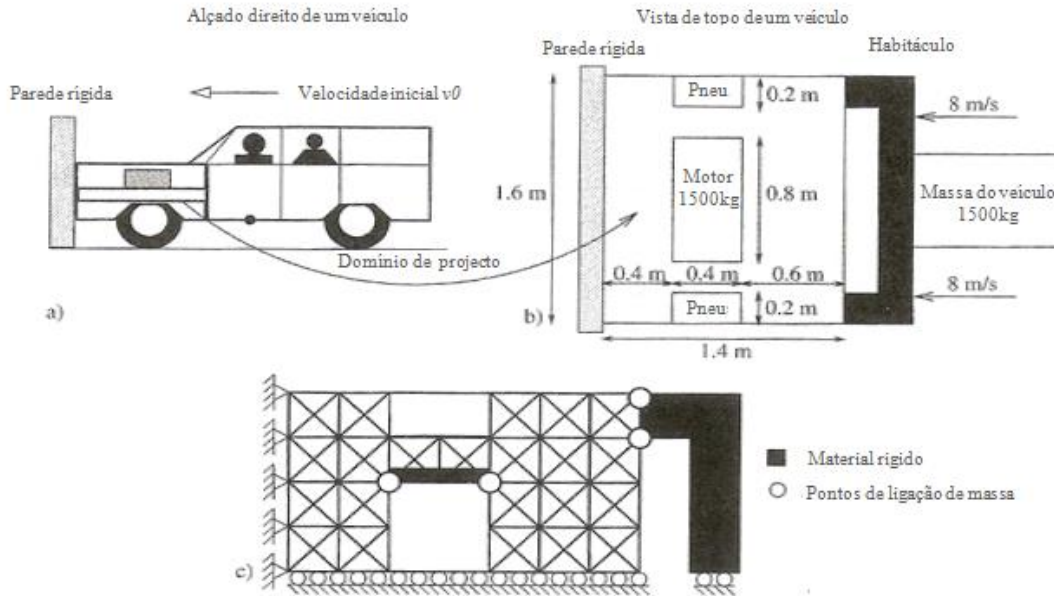


Figura 1.1: Modelação da parte frontal de um automóvel com 272 elementos de viga [4].

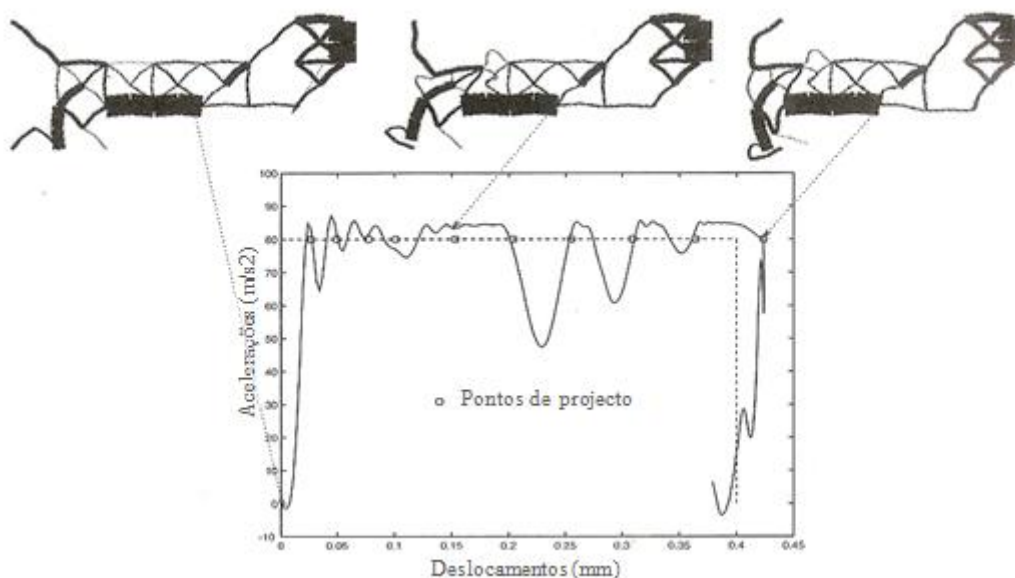


Figura 1.2: Ilustração gráfica do problema de minimização do erro entre a aceleração real e máxima permitida assim como a optimização da parte frontal de um automóvel [4].

Durante um despiste é comum que os veículos embatam contra as guardas de segurança rodoviárias (também conhecidas como barreiras de segurança). Estas foram concebidas através de um processo experimental de testes sucessivos de tentativa e erro até que a estrutura obtida tivesse o comportamento desejado [8]. Assim sendo é de grande interesse aplicar modelos numéricos à optimização topológica de guardas de segurança de forma a obter uma guarda com melhor comportamento e reduzir os custos de projecto eliminando os testes de impacto à escala real. Atenta a este facto, a empresa Portuguesa *Carcrash*¹ que estuda acidentes rodoviários através de simulação por computador apoia o desenvolvimento do tema desta dissertação.

1.1. Objectivo

Nesta dissertação vai desenvolver-se uma guarda de segurança com secção transversal uniforme utilizando a optimização topológica de estruturas aplicada a um problema de minimização da flexibilidade ou *compliance*² de forma a obter uma barreira que seja a mais rígida possível para o carregamento aplicado. De forma a simplificar as análises, as forças de impacto foram consideradas como sendo estaticamente aplicadas.

¹ www.carcrash.pt

² Designação Anglo-saxónica para flexibilidade

Para o conseguir, começou-se por estudar o comportamento da solução mais usada actualmente em Portugal, a guarda de segurança rodoviária em *W*, durante um impacto. Tal foi feito construindo um modelo de elementos finitos que teve em consideração as dimensões e materiais dos componentes [9,10] assim como os métodos utilizados actualmente na literatura para simular de forma simplificada a resposta da barreira de modo a evitar um custo computacional excessivo [8,11]. Tais simplificações incidem sobre o comprimento da barreira a modelar, as ligações aparafusadas e a interacção entre o prumo e o solo.

Para aplicar de maneira correcta a optimização topológica a perfis de secção transversal uniforme (caso da guarda de segurança), foi necessária a familiarização com o tema de optimização de topologia de estruturas para problemas de minimização da flexibilidade em geral. Tal foi feito tendo em conta o livro de M.P.Bendsøe e O.Sigmund [6]. Uma vez concluído este estudo procedeu-se a uma recolha de informações sobre os métodos numéricos utilizados para resolver problemas deste tipo, mais concretamente o critério de optimalidade [6] e o método das assimptotas móveis (MMA) [6,12]. Foi então utilizado um código de optimização topológica em 2-D, escrito em Matlab por O.Sigmund [13], para correr exemplos de teste com diversas condições de fronteira assim como para analisar a influência de múltiplos casos de carga e de pontos de não *design* na solução final. Seguiu-se a adaptação de um código de optimização topológica em 3-D, baseado no código em 2-D de O.Sigmund e escrito em FORTRAN pelo orientador desta dissertação, para optimização de perfis de secção transversal uniforme.

1.2. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em nove capítulos. No presente capítulo, o Capítulo 1, introduziu-se o tema da dissertação e justificou-se o interesse de aplicar a optimização de topologia de estruturas a guardas de segurança rodoviárias. Seguiu-se uma descrição dos objectivos deste trabalho assim como a descrição da estrutura da tese.

No Capítulo 2 é apresentada a barreira de segurança mais comum em Portugal, a guarda de segurança em *W* (*W-beam rail* em Inglês). É nesta fase da dissertação que são descritos o material e a geometria dos vários componentes que constituem a barreira em *W*.

No Capítulo 3 é explicada a forma como as guardas de segurança em *W* são modeladas por elementos finitos actualmente. Os pontos críticos de acordo com a literatura são o comprimento total a modelar, as ligações aparafusadas e a simulação da interacção entre o solo

e o prumo. Uma vez concluída esta descrição é apresentado um modelo de uma guarda de segurança em W desenvolvido no âmbito desta dissertação.

O Capítulo 4 é um capítulo de resultados. Nesta secção da dissertação apresentam-se os resultados da simulação efectuada com o modelo da guarda de segurança descrito no Capítulo 3. O *software* de elementos finitos utilizado para correr a simulação foi o programa comercial ANSYS.

No Capítulo 5 apresentam-se os conceitos e formulações teóricas da optimização topológica de estruturas para problemas de minimização da flexibilidade (ou *compliance*). Este capítulo também apresenta uma descrição do algoritmo de optimização utilizado ao longo da dissertação.

No Capítulo 6 são descritas as alterações a efectuar nas formulações do Capítulo 5 para que a optimização topológica possa ser aplicada a perfis de secção transversal constante. Estas modificações são importantes pois nesta dissertação pretende-se obter uma guarda de segurança que seja um perfil de secção transversal constante. Segue-se uma descrição do funcionamento do código escrito em FORTRAN que aplica a optimização topológica a perfis de secção transversal uniforme.

O Capítulo 7 destina-se a apresentar resultados. Neste capítulo utilizou-se um código escrito em FORTRAN descrito no Capítulo 6 para efectuar vários estudos de caso. Em primeiro lugar são analisados três estudos de caso cujo resultado é de fácil interpretação de forma a determinar se o código funciona correctamente. Seguiu-se então a análise desses três estudos de caso mas com diferentes distribuições de densidade iniciais para determinar a influência que estas têm no resultado final. Por fim foi testado o efeito que pontos de não *design* têm sobre o *design* final.

No Capítulo 8 apresentam-se os resultados da optimização topológica da guarda de segurança. Começa-se por descrever o modelo utilizado seguindo-se a exposição dos resultados obtidos para modelos de 10m de uma guarda de segurança.

Por fim, no Capítulo 9 são apresentadas as conclusões e é discutido o uso da optimização topológica de estruturas com o objectivo de maximizar a capacidade de absorção de energia das mesmas.

Capítulo 2

Guarda de segurança rodoviária em Portugal

2.1. Descrição da guarda de segurança em *W*

Actualmente, em Portugal, as guardas de segurança rodoviárias mais utilizadas têm a secção transversal em forma de um *W* e são designadas na literatura anglo-saxónica como *W-Beam rails*. Este tipo de guardas de segurança tem como principal função impedir que um veículo despistado saia da zona pavimentada da estrada.

Uma guarda de segurança em *W* é composta por 5 componentes de acordo com a norma Francesa NF P 98-411 [9]: O ecrã, os absorçores, os prumos, os parafusos e as respectivas porcas [9]. O ecrã de secção transversal em forma de *W* é o local onde o veículo em despiste colide com a estrutura. Os absorçores têm como funções ligar o ecrã aos prumos e absorver parte da energia do impacto distribuindo-a para os prumos. Os prumos com secção transversal em forma de *C* são espaçados de dois em dois metros [9] e têm as funções de ancoragem da estrutura ao solo e de absorção de parte da energia do impacto. Durante um impacto, todos estes componentes sofrem deformações importantes o que faz com que absorvam parte da energia do impacto. Na Figura 2.1 são apresentadas a vista frontal e o alçado direito de um troço de 4m de uma guarda de segurança em *W* [10].

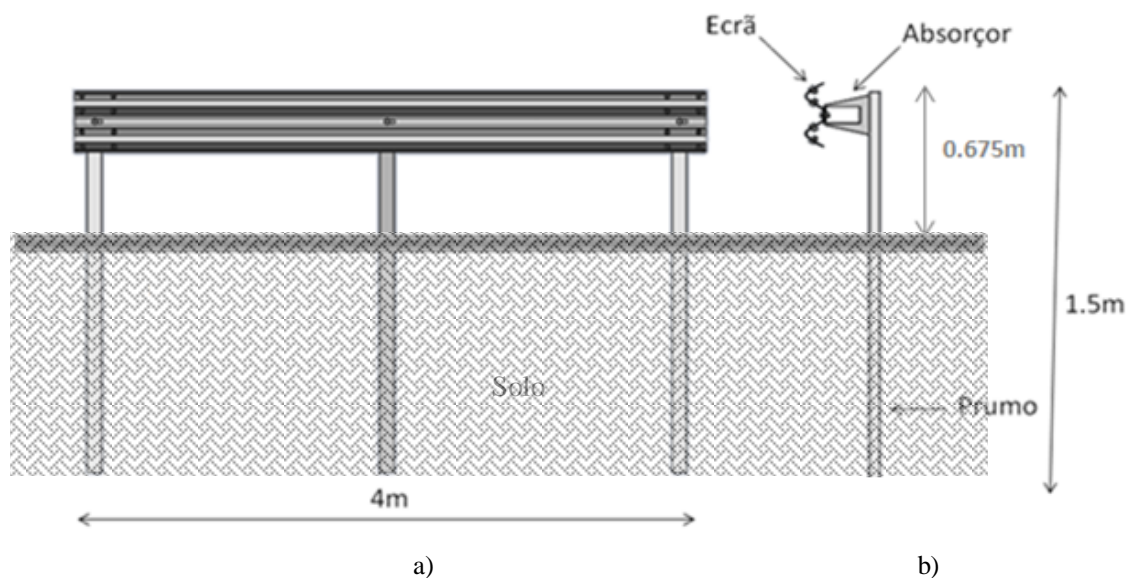


Figura 2.1: Guarda de segurança em W utilizada em Portugal e França, a) Vista frontal, b) Alçado [10]

Como foi referido no Capítulo 1, a geometria da guarda de segurança rodoviária em W foi determinada através de um processo experimental de tentativa e erro até que a estrutura tivesse a resposta pretendida. Durante cada tentativa foi necessário construir uma guarda de segurança com a geometria pretendida, à escala real, e testar a resposta desta a um embate com um automóvel [8].

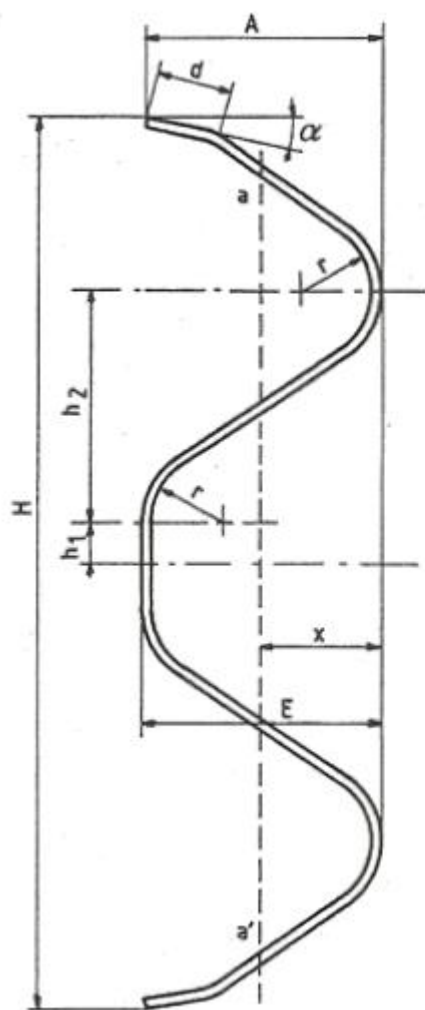
Esta forma de desenvolvimento tem custos muito elevados pois implica a utilização de um automóvel e a construção de uma guarda de segurança à escala real. Para além do referido anteriormente, o impacto provoca grandes deformações ou até mesmo a rotura da barreira assim como a destruição do veículo usado. Assim sendo será necessário obter um novo automóvel e construir uma nova guarda de segurança para se poder efectuar um novo teste.

2.2. Dimensões dos componentes

Em seguida vão ser descritas todas as dimensões dos vários componentes da guarda de segurança rodoviária em W

2.2.1. Ecrã

O ecrã de uma guarda de segurança em W tem uma espessura de 3mm e é produzido em troços de 4135mm de comprimento [9]. As restantes dimensões são apresentadas na Figura 2.2:



Dimensões e tolerâncias [mm]

Dimensões nominais	Tolerâncias
H 310	+ 6 0
A 81	+ 6 0
E 81	+ 5 0
h_1 14	+ 1 - 0,5
h_2 82	+ 2 - 1
d 27	± 1
r 24	± 2
α 10°	$\pm 3^\circ$
x 39	+ 3 - 2

Figura 2.2: Dimensões do ecrã em mm [9].

2.2.2. Absorçor

Os absorçores possuem uma espessura de 3mm [9]. As restantes dimensões são apresentadas na Figura 2.3:

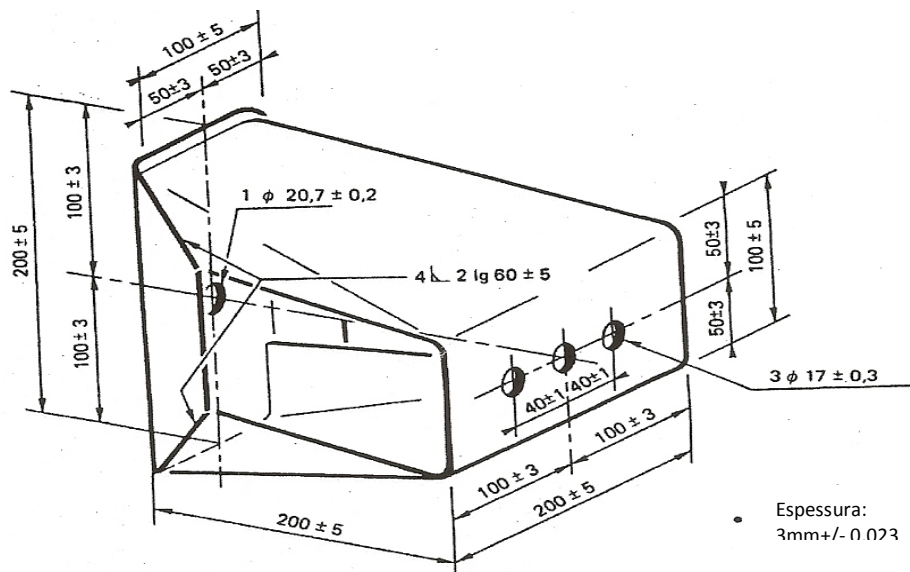
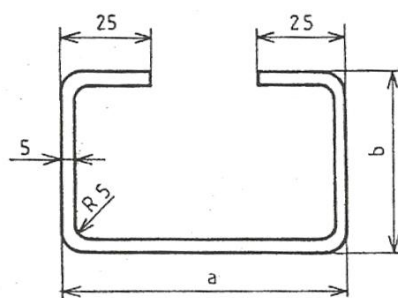


Figura 2.3: Dimensões do absorçor em mm [9].

2.2.3. Prumos.

Os prumos possuem um comprimento de 1500mm [9]. As restantes dimensões são apresentadas na Figura 2.4:



	GS 2	GRC
Designação	C 100	C 125
a	100	125
b	50	62,5

Figura 2.4: Dimensões do prumo em mm [9].

2.2.4. Parafusos.

As dimensões dos parafusos e das respectivas porcas são apresentadas na Figura 2.5:

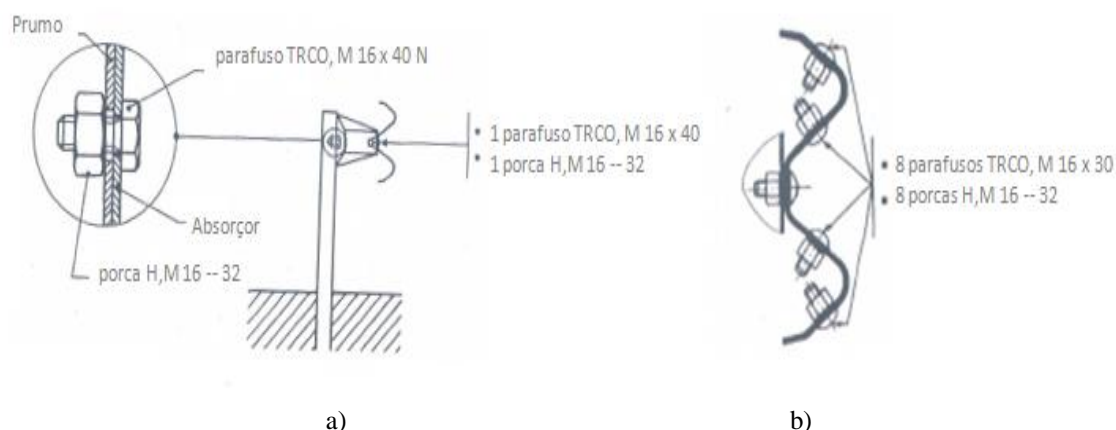


Figura 2.5: Dimensões dos parafusos em mm a) Ligação absorçor – prumo e absorçor – ecrã b) ligação ecrã - ecrã [9].

2.3. Materiais dos componentes.

O ecrã, os absorçores e os prumos são feitos em aço S235JR [9] com as características apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Propriedades do aço S235JR [14]

Densidade	7865 kg/m ³
Módulo de Young	210 GPa
Coefficiente de Poisson	0.3
Tensão de Cedência	300 MPa
Módulo tangente	610 MPa

O parâmetro módulo tangente é utilizado para aproximar a curva tensão - extensão dum material, na zona onde ocorre encruamento, a uma recta com um declive de valor igual ao módulo tangente. Esta aproximação é particularmente útil quando se pretende simular o comportamento não linear do material de uma guarda de segurança através de elementos finitos (esta aproximação será explicada no capítulo 4 subcapítulo 4.4).

Os parafusos e as porcas usados são constituídos de acordo com a norma NF P 98-411 [9] pelo material denominado de material 5.8 para os parafusos M16x30 e M16x40 que ligam os

vários troços de ecrãs entre si e os absorçores aos ecrãs e pelo material 6.8 para os parafusos que ligam o absorçores aos prumos.

Capítulo 3

Modelação em elementos finitos de uma guarda de segurança rodoviária em W

Neste capítulo vai ser apresentada e discutida a modelação através do Método dos Elementos Finitos (MEF) da guarda de segurança rodoviária em W analisada nesta dissertação.

A utilização da mecânica computacional e em particular o MEF permite analisar o comportamento de estruturas complexas sujeitas aos mais variados tipos de esforços. É portanto de grande interesse aplicar este método para simular impactos de automóveis com barreiras de segurança pois para além de se obterem resultados muito próximos da realidade, caso o modelo seja adequado, também permite baixar os custos de desenvolvimento pois minimiza-se o recurso aos testes de impacto reais durante a concepção de uma guarda de segurança.

As dimensões da guarda de segurança a modelar são as definidas no Capítulo 2 e estão de acordo com a norma NF P 98-411 [9,10]. Uma vez que não foram encontrados artigos científicos em que se recorra à mecânica computacional e ao MEF para simular o comportamento das barreiras de segurança que estão de acordo com a norma NF P 98-411, utilizou-se como fonte bibliográfica os trabalhos de Ala Tabiei e Jin Wu [8,11] que estudaram

através do MEF o comportamento da guarda de segurança mais comum nos Estados Unidos da América, a G41(S) aquando de um impacto com um veículo de 2000 kg a uma velocidade de 100 km/h. A guarda de segurança Americana também possui um ecrã em W sendo que as diferenças em relação à Europeia são a geometria dos prumos (vigas em I) e dos absorçores (paralelepípedos) [8,11].

Segundo Ala Tabiei e Jin Wu [11] os principais factores a ter em atenção na modelação de uma guarda de segurança são o comprimento da barreira, as ligações aparafusadas dos diversos componentes e a interacção entre os prumos e o solo. Estes aspectos vão ser discutidos nas secções seguintes e implementados num modelo de elementos finitos construído no programa comercial ANSYS de forma a simular o mesmo impacto considerado por [8,11]. O modelo da barreira foi construído utilizando a linguagem paramétrica do ANSYS: *ANSYS Parametric Design Language* (APDL).

3.1. NCHRP Report 350

De forma a modelar convenientemente a guarda de segurança em elementos finitos, foi necessário determinar qual o impacto a simular. Uma vez que Ala Tabiei e Jin Wu [11] estudaram o comportamento da guarda de segurança G41(S) tendo por base as informações disponibilizadas no *National Cooperative Highway Research Program* (NCHRP) *Report 350* optou-se por efectuar o mesmo aplicando-o à guarda de segurança Portuguesa em conformidade com a norma a norma NF P 98-411 [9].

O NCHRP [15] é um documento de origem Norte Americana que possui um conjunto de testes a efectuar para avaliar o desempenho de guardas de segurança rodoviárias. Nestes testes um veículo embate numa guarda de segurança a uma determinada velocidade e ângulo de ataque com uma guarda de segurança. Segundo o NCHRP [15], os testes de impacto à escala real podem ser executados com veículos de 700 kg, 800 kg, 2000 kg, 8000 kg e 36000 kg. De forma a obter resultados realistas este documento recomenda o uso de veículos que não tenham sido danificados previamente.

Ala Tabiei e Jin Wu [11] optaram pela reprodução do teste 11 do NCHRP *Report 350* [15] que analisa a capacidade que uma guarda de segurança tem em redireccionar um veículo de 2000kg que embate com a barreira num ângulo de 25° a uma velocidade de 100km/h. A Figura 3.1 [11] ilustra esse teste:

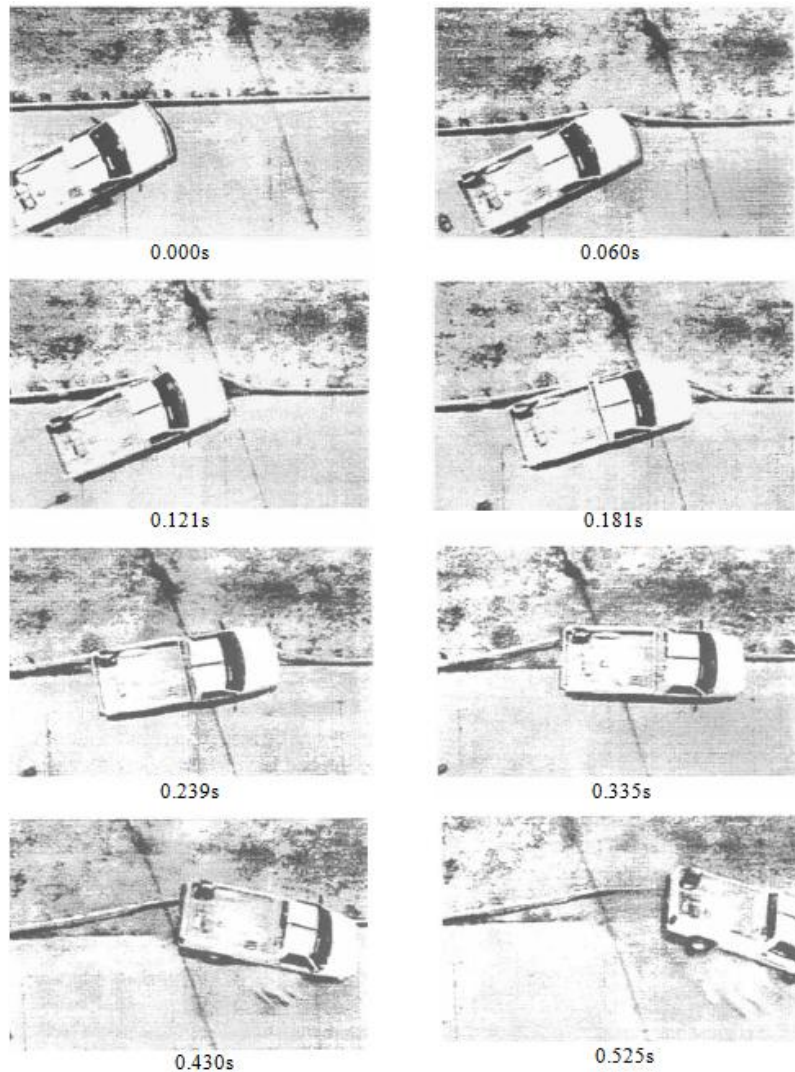


Figura 3.1: Teste de uma guarda de segurança de acordo com o
NCHRP *Report 350* [11]

Este teste deve ser efectuado com uma barreira de segurança com um comprimento mínimo que cumpra as seguintes condições [15]:

- Pelo menos três vezes superior ao comprimento deformado previsto.
- Nunca inferior a 23 m.
- Deve ser suficiente para que as extremidades da barreira que se encontram fixas não influenciem a resposta desta durante o embate.

3.2. Comprimento da guarda de segurança a modelar

De acordo com Ala Tabiei e Jin Wu [8,11] é necessário modelar uma guarda de segurança de 68.6m para que os resultados da análise da barreira sigam o *NCHRP Report 350*

para o teste que se refere ao embate de um veículo de 2000kg com uma guarda de segurança a uma velocidade de 100km/h com um ângulo de 25°

No entanto, um modelo de 68.6m implicaria uma análise com um custo computacional muito elevado. De forma a contornar este problema modela-se uma barreira de segurança mais curta e utilizam-se molas lineares para simular a restante rigidez da guarda não modelado [8,11]. A rigidez das molas é dada pela seguinte fórmula [8,11]:

$$K = \frac{EA}{L} \quad (3.1)$$

Em que K representa a rigidez da mola, E o módulo de Young do aço, A a área da secção transversal do ecrã e L o comprimento não modelado da guarda de segurança como ilustra a Figura 3.2:

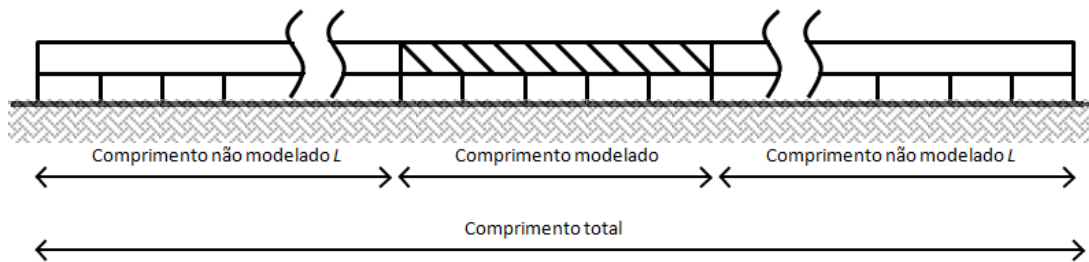


Figura 3.2: Comprimento não modelado L de uma guarda de segurança

3.3. Modelação das ligações aparafusadas.

Conforme foi referido no Capítulo 2, os ecrãs, os prumos e os absorçores são ligados entre eles por parafusos. Estes são portanto responsáveis pela integridade estrutural da guarda de segurança. De acordo com Ala Tabiei e Jin Wu [8,11] alguns dos parafusos que ligam os absorçores ao ecrã ficam sujeitos a elevados estados de tensão durante o impacto. Nestas situações, a zona de aparafusamento do ecrã com o absorçor pode atingir a tensão de rotura do material do ecrã fazendo com que este se solte do absorçor. Este fenómeno é de grande importância pois influencia drasticamente a forma como o veículo é redireccionado durante o choque com a barreira de segurança.

É portanto necessário ter especial atenção na modelação das ligações aparafusadas entre o ecrã e os absorçores. Ala Tabiei e Jin Wu sugerem em [8] quatro formas diferentes de modelar os parafusos.

A primeira é a modelação detalhada dos parafusos. Esta forma de simular o efeito produzido pelos parafusos na guarda de segurança não é muito prática pois torna o modelo demasiado pesado aumentando assim o custo computacional. Este método para simular os parafusos é portanto desaconselhado. Na Figura 3.3 é possível ver a diferença de refinamento da malha do ecrã e do parafuso [8].

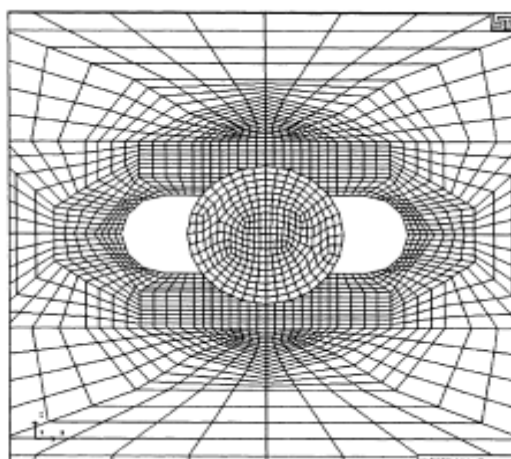


Figura 3.3: Modelação detalhada do parafuso [8]

A segunda maneira de modelar os parafusos é através da utilização da opção *merging nodes* ou seja, fundir os nós comuns do ecrã e do absorçor. Este método tem como principal desvantagem o facto de não conseguir simular a rotura do ecrã por parte dos parafusos mas tem como vantagem um menor custo computacional.

O terceiro método que pode ser usado para modelar os parafusos é a opção *tied node sets with failure* do LS-DYNA³. Neste tipo de ligação os nós do absorçor e do ecrã permanecem ligados até que uma determinada extensão seja atingida. A partir desse valor os nós separam-se simulando assim a altura em que os parafusos deixaram de ligar o ecrã aos absorçores.

Por fim, o último método referido em [8] consiste em simular as ligações aparafusadas com molas não lineares que segundo Ala Tabiei e Jin Wu é a melhor forma de as modelar. As curvas força – deslocamento das molas não lineares são obtidas testando-se os parafusos em questão.

³ Software de elementos finitos destinado a análises dinâmicas não lineares em regime transitório

3.4. Modelação da interacção entre o prumo e o solo.

Num primeiro olhar para uma guarda de segurança rodoviária poder-se ia ser levado a considerar que a interacção prumo – solo é feita através de um encastramento. No entanto o solo possui uma rigidez quantificada e a partir de um certo nível de tensão começa a ceder. Na Figura 3.4 é ilustrado um exemplo deste fenómeno [16].



Figura 3.4: Cedência do solo após impacto de um automóvel com uma guarda de segurança [16]

Assim sendo é necessário modelar o solo tendo em conta a rigidez finita do mesmo. A modelação completa do solo em elementos finitos aumentaria drasticamente o custo computacional da simulação. A solução encontrada por Ala Tabiei , Jin Wu [8] e por Plaxicco [17] é a utilização de molas não lineares com uma rigidez equivalente à do solo. Nos próximos subcapítulos vão ser descritos os dois métodos que estes autores encontraram para modelar o solo.

3.4.1. Modelo de Ala Tabiei e Jin Wu.

As reacções do solo sobre o prumo responsáveis pela ancoragem da guarda de segurança rodoviária ao solo são apresentadas na Figura 3.5:

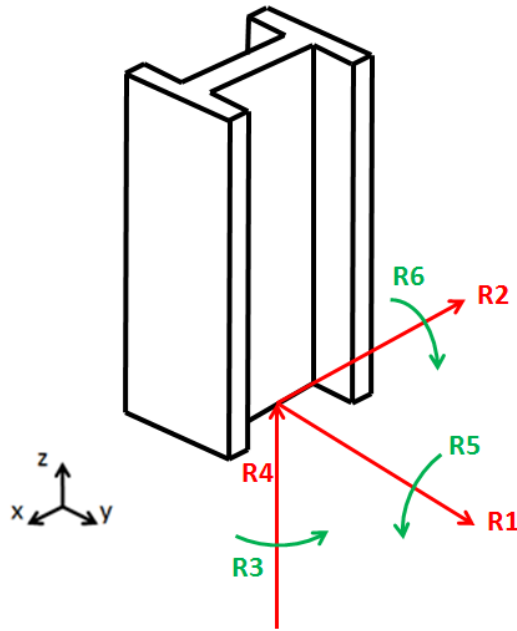


Figura 3.5: Reacções do solo sobre o prumo

Ala Tabiei e Jin Wu [8] obtêm as reacções **R1**, **R2** de força e **R3** de momento da Figura 3.5 através do uso de 21 molas não lineares: 5 molas não lineares axiais $K1$ segundo o eixo YY , 10 molas não lineares axiais $K2$ segundo o eixo XX e 6 molas não lineares torsionais $K3$ segundo o eixo ZZ . A distribuição de forças nas molas $K1$ e $K2$ origina os momentos de reacção **R6** e **R5** respectivamente. Quanto à reacção **R4** esta pode ser obtida restringindo o deslocamento vertical num ponto Na Figura 3.6 [8] é apresentada um modelo de uma guarda de segurança G41(S) utilizando este método para simular a rigidez do solo.

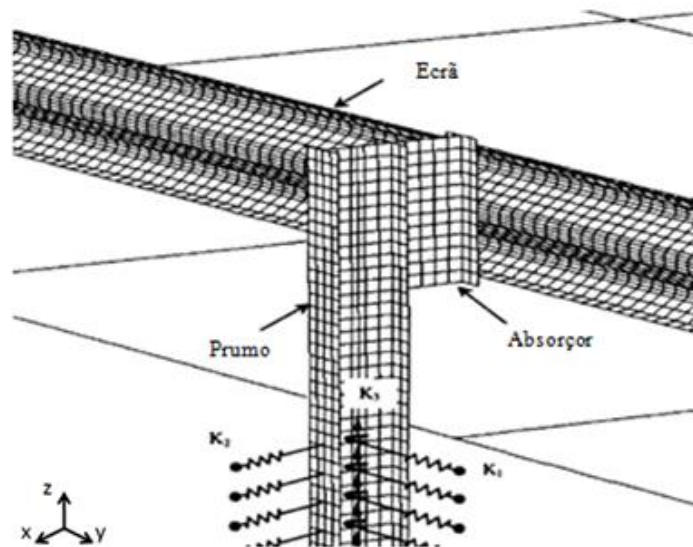


Figura 3.6: Modelação do solo segundo Ala Tabiei e Jin Wu [8]

As curvas das rigidezes das molas são calculadas através da simulação do comportamento de um prumo enterrado no solo [8]. Para tal, é modelada uma pequena porção cilíndrica de solo no qual se coloca um prumo (Figura 3.7 [8]).

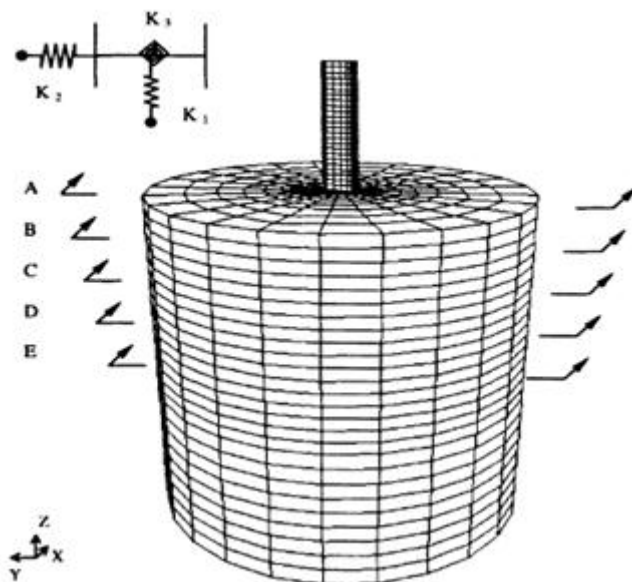


Figura 3.7: Modelação da ligação solo - prumo para a obtenção das curvas de rigidez das molas não lineares [8]

De forma a obter os resultados mais correctos possíveis deve definir-se, segundo Ala Tabiei e Jin Wu, uma única superfície de contacto entre o prumo e o solo caso se esteja a usar uma malha de Lagrange [8]. Caso se utilize uma malha de Euler deixa de ser necessário definir zonas de contacto pois a distorção da malha do solo deixa de ser um problema [8].

Procede-se então à obtenção da curva de rigidez das molas em cada uma das três direcções possíveis (direcção vertical, direcção paralela, e direcção perpendicular). As curvas têm que ser obtidas separadamente [8].

Para o caso da mola torsional, por exemplo, é aplicada uma função que faz variar o ângulo que o eixo do prumo faz em relação ao solo (no plano XY) em função do tempo e utiliza-se a opção *SECFORCE* do LS-DYNA 3D para se obter o momento na secção transversal do prumo em cada um dos pontos A, B, C ... da Figura 3.7. Em seguida, são obtidos os valores para as rotações dos nós através do ficheiro *NODOUT* do LS-DYNA 3D. Tendo os valores dos momentos e das rotações nos vários nós é possível construir a curva de rigidez da mola $K3$ [8].

3.4.2. Modelo segundo Plaxico

Plaxico também propõe que a modelação da interacção entre o solo e os prumos seja feita com molas não lineares. No entanto o seu método considera que apenas as reacções **R1** e **R2** da Figuras 3.5 são modeladas com molas não lineares. Assim sendo, Plaxico utiliza apenas 10 molas axiais por prumo: 5 na direcção do eixo *XX* e 5 na direcção do eixo *YY* [17]. As molas são colocadas em pares (uma na direcção do eixo *XX* com uma na direcção do eixo *YY*) espaçadas de 100mm entre cada uma segundo o eixo *ZZ* [17]. Na Figura 3.8 [18] é possível ver a forma como as molas são dispostas num modelo de uma guarda de segurança americana G41(S).

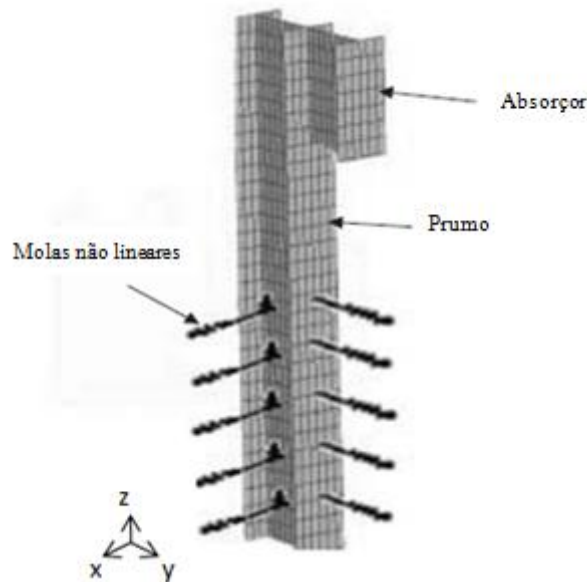


Figura 3.8: Disposição das molas não lineares segundo Plaxico [18]

As curvas de rigidez das molas são calculadas, para um solo granular não compactado, pela seguinte fórmula [17]:

$$K_h = N_q \frac{\sigma_e}{\bar{d}} \quad (3.2)$$

Onde K_h é a rigidez da mola, N_q é a capacidade de rolamento lateral do solo, σ_e é a tensão efectiva e \bar{d} é a deflexão do prumo. Plaxico sugere um valor de 16000N/m^2 para σ_e .

Por sua vez a capacidade de rolamento lateral do solo é uma grandeza adimensional calculada por [17]:

$$N_q = Q + \sqrt{\frac{Z}{B}} \quad (3.3)$$

Em que Z e B são a profundidade a que está colocada a mola e a largura do prumo respectivamente. O parâmetro Q é um parâmetro adimensional obtido empiricamente e cujo valor depende do ângulo de atrito interno entre o solo e da deflexão y do prumo [17]. Segundo Plaxicco [17], para um ângulo de 30° :

$$Q = 15.276 - 14.09e^{-0.1246d} \quad (3.4)$$

As curvas das constantes de rigidez das molas perpendiculares e paralelas são apresentadas na Figura 3.9 e na Figura 3.10 respectivamente [19].

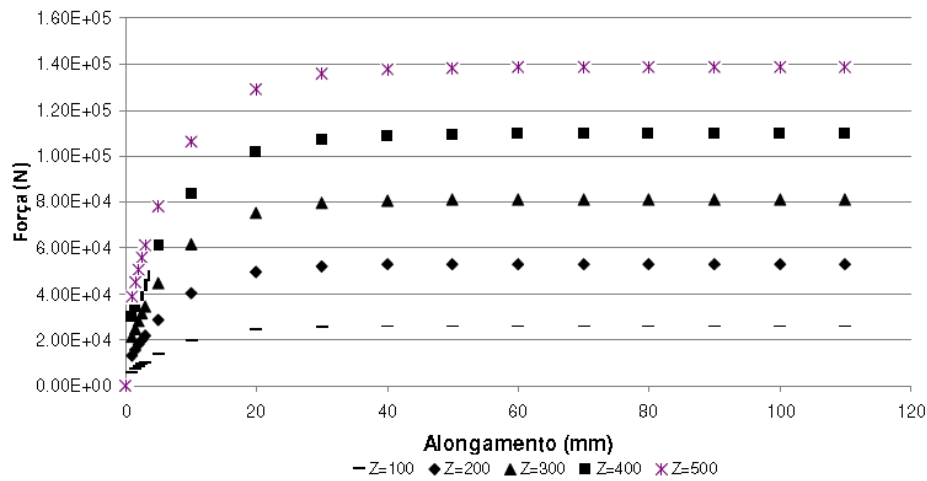


Figura 3.9: Curvas de rigidez das molas perpendiculares ao ecrã da guarda de segurança [19]

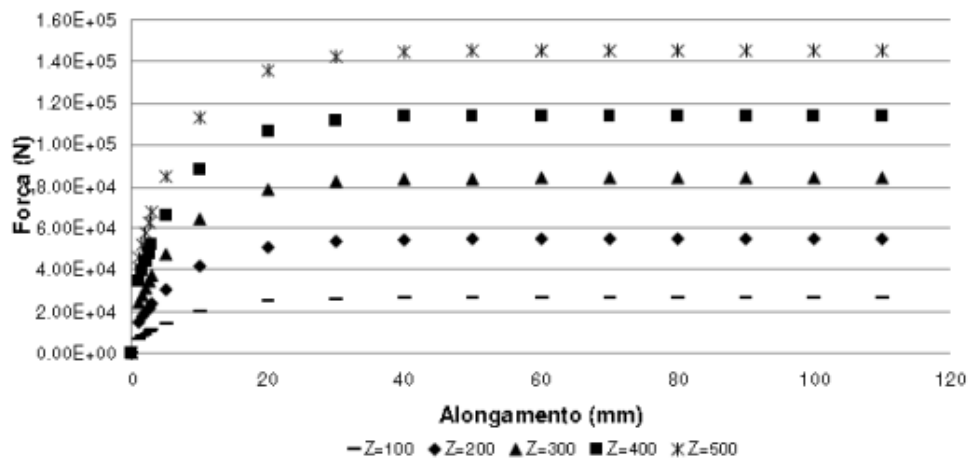


Figura 3.10: Curvas de rigidez das molas paralelas ao ecrã da guarda de segurança [19]

3.5. Construção do modelo da guarda de segurança

De forma a simular o comportamento de uma barreira de segurança rodoviária em *W* construiu-se um modelo da mesma em elementos finitos através da linguagem paramétrica do ANSYS, APDL. Este subcapítulo destina-se a descrever o modelo e as simplificações utilizadas para reduzir o custo computacional.

3.5.1. Comprimento modelado

Segundo [8,11] para que a simulação respeite o *NCHRP Report 350* [15], o comprimento total da guarda de segurança deve ser de 68.6m. O comprimento modelado de acordo com [8,11] deve ser de 25.7m. No entanto, um modelo com este comprimento tornaria a análise da guarda de segurança demasiado pesada computacionalmente (nomeadamente na parte de optimização topológica). Assim sendo após a análise das várias imagens da simulação realizada por Ala Tabiei e Jin Wu (ver Figura 3.11) [11] do embate de um veículo com a guarda de segurança respeitando as condições exigidas pelo teste 11 descrito no *NCHRP Report 350* [15], concluiu-se que durante o impacto, a viatura apenas está em contacto com a barreira num troço de 10m de comprimento. Optou-se então por modelar 10m da barreira em detalhe sendo os restantes 58.6m da barreira modelados com molas lineares como descrito no capítulo 3 (subcapítulo 3.1).

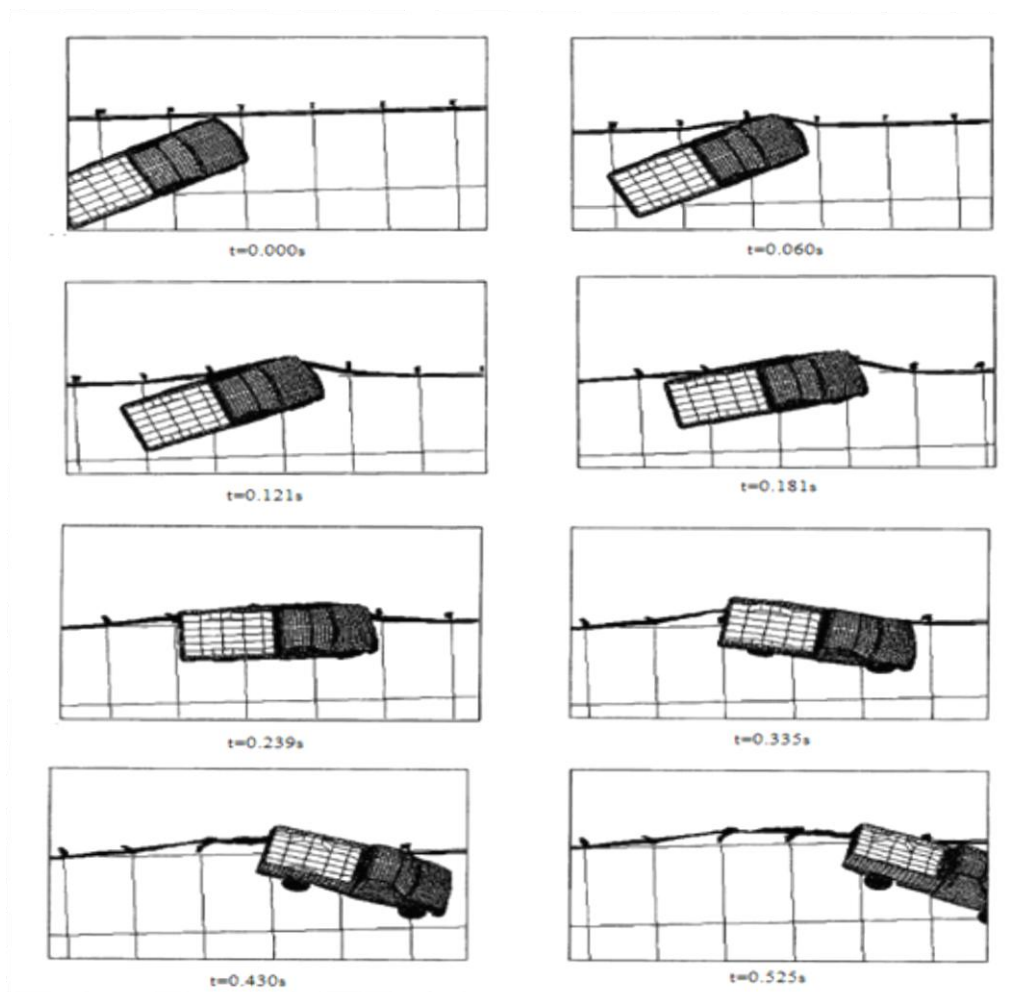


Figura 3.11: Choque entre veículo e guarda de segurança [11]

3.5.2. Modelação dos componentes

O modelo foi construído no software comercial de elementos finitos ANSYS versão 11.0 tendo sido criado um ficheiro escrito em APDL do mesmo.

3.5.2.1 Prumos

Uma vez que não se pretende obter a distribuição de tensões nos prumos pois o objectivo desta dissertação é o de otimizar o ecrã da guarda de segurança modelou-se os prumos com elementos de viga *BEAM4*. A discretização de cada prumo foi feita por intermédio de 18 elementos *BEAM4*. Este tipo de elementos suporta esforços de tracção, compressão, flexão e torção admitindo que o material não plastifica mas pode sofrer grandes deformações [20]. O elemento do tipo *BEAM4* é composto por dois nós com seis graus de liberdade cada:

deslocamentos (**U**) e rotações (**ROT**) segundo todos os eixos das coordenadas locais (XX, YY e ZZ) [20] como apresentado na Figura 3.12.

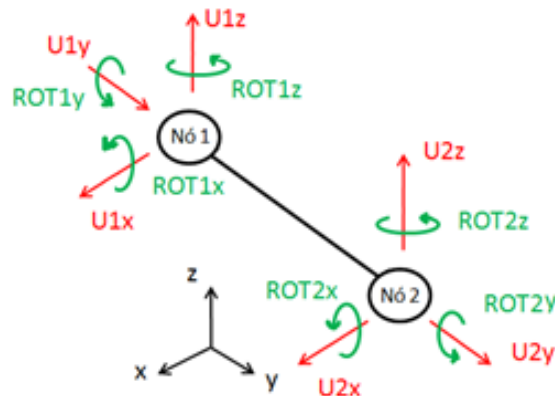


Figura 3.12: Graus de liberdade do elemento *BEAM4*

Este tipo de elementos permite modelar de forma realista o comportamento dos prumos sem que se torne necessário modelar detalhadamente a sua geometria, o que acarretaria um acréscimo do custo computacional na análise.

Para calcular os valores dos momentos de inércia e da área da secção transversal, requeridos pelo ANSYS aquando da utilização dos elementos *BEAM4*, foi utilizado um modelo do prumo construído no *software* Solidworks (modelo cedido pela Carcrash). Os valores obtidos são de $609769.91mm^4$ para o momento de inércia da área calculado no centroide segundo o eixo XX (I_x), $2796162.14mm^4$ para o momento de inércia da área calculado no centroide C segundo o eixo YY (I_y) e $2113.73mm^2$ para a área da secção transversal. Na Figura 3.13 é apresentada a secção transversal de um prumo GS(2) (Figura 2.4) assim como os eixos situados no centroide da secção transversal do prumo segundo os quais foram calculados os momentos de inércia I_x e I_y .

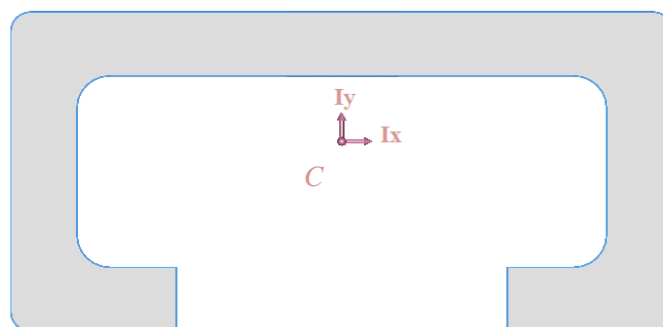


Figura 3.13: Vista de topo da secção transversal do prumo e eixos segundo os quais foram calculados os momentos de inércia [10]

3.5.2.2 Ecrã, absorçor e ligações aparafusadas

Uma vez que se pretende otimizar o ecrã de uma guarda de segurança nesta dissertação era importante modelar correctamente o ecrã em W actual. Para tal foi necessário ter em conta que este componente sofre grandes deformações durante o choque o que faz com que o material que compõe o ecrã entre em domínio plástico. De forma a conseguir reproduzir este comportamento no modelo, utilizou-se o elemento do tipo placas e cascas *SHELL181*. Este elemento é composto por quatro nós. Cada um dos nós possui seis graus de liberdade: deslocamentos (**U**) e rotações (**ROT**) segundo os eixos XX , YY e ZZ [20] como se pode ver na Figura 3.14:

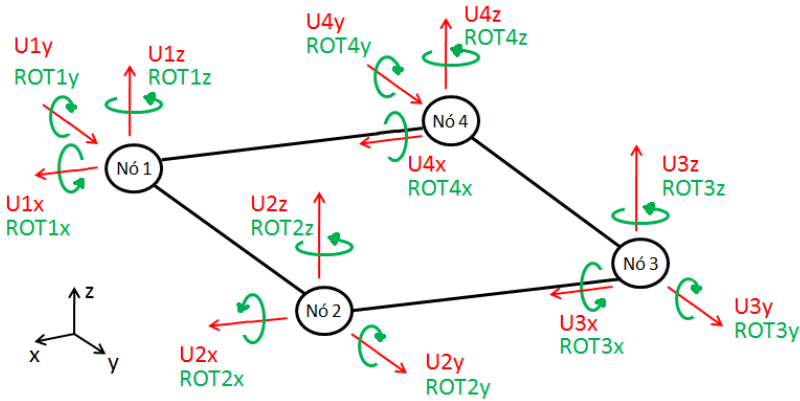


Figura 3.14: Graus de liberdade do elemento *SHELL181*

O ecrã foi discretizado com 9600 elementos e a malha do mesmo é composta por quadriláteros. De forma a simplificar o modelo da guarda de segurança, os absorçores e os parafusos não foram modelados. Assim sendo os prumos estão directamente ligados ao ecrã através de dois nós para evitar concentrações de tensões num único nó (Figura 3.15).

As molas lineares axiais que simulam a rigidez dos 58.6m não modelados da guarda de segurança foram modeladas com o elemento *COMBIN14*. Este elemento pode ser aplicado em modelos de uma até três dimensões e possui dois tipos de mola diferentes (axiais ou torsionais). Os nós deste elemento possuem três graus de liberdade (deslocamentos segundo o eixo XX , YY e ZZ) sendo que a mola apenas opera na direcção segundo a qual os nós se encontram alinhados. Na Figura 3.16 apresentam-se os graus de liberdade do elemento *COMBIN14* para uma mola axial que opera segundo o eixo YY . É possível adicionar ao elemento um amortecedor mas tal não foi feito pois não apresentava interesse para a análise da guarda de segurança.

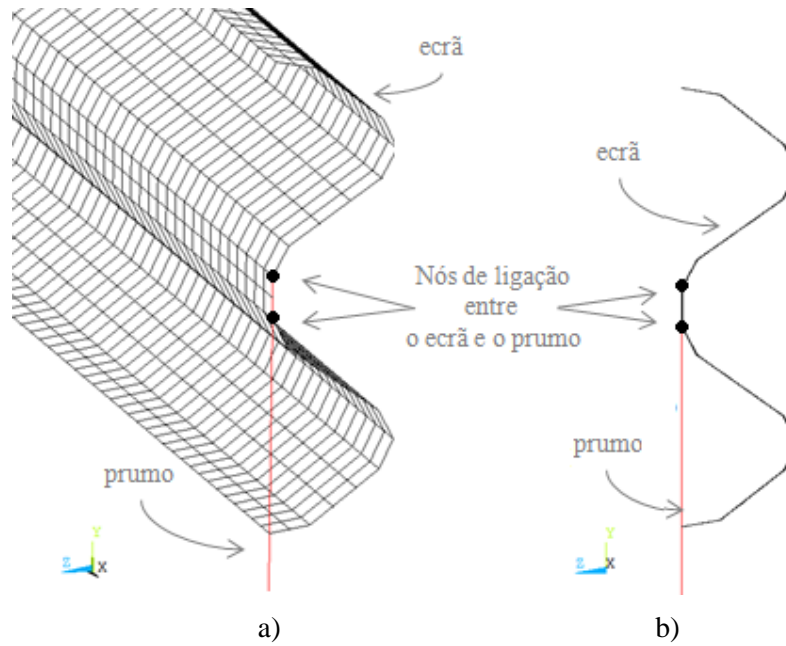


Figura 3.15: Nós de ligação entre os prumos e o ecrã, a) vista em perspectiva, b) alçado esquerdo

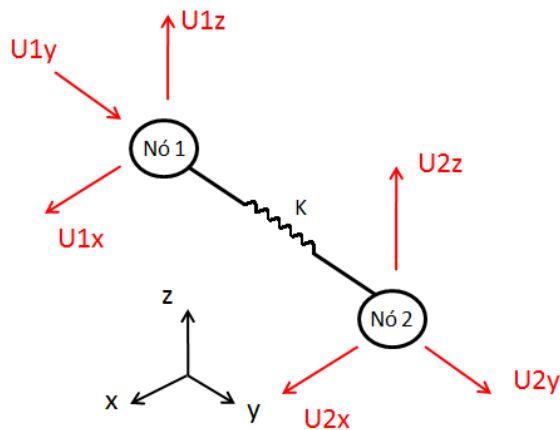


Figura 3.16: Graus de liberdade do elemento *COMBIN14* para uma mola axial

Utilizando (3.1) em conjunto com a Figura 3.2 e calculando a área da secção transversal do ecrã no *software* Solidworks (ficheiro cedido pela *Carcrash*) obtém-se:

$$K_t = \frac{EA}{L} = \frac{210 \times 10^9 \times 0.00142997}{\frac{68.6 - 10}{2}} = 1.02489 \times 10^7 \text{ N/m} \quad (3.5)$$

Em seguida dividiu-se o valor da rigidez K_t pelo número de nós n_n situados em cada uma das extremidades do ecrã, criando-se assim um conjunto de 25 molas em paralelo em cada

uma das extremidades do ecrã de forma a evitar concentrações de tensões num único nó. Obteve-se então o seguinte valor para a rigidez de cada uma das molas:

$$K = \frac{K_t}{n_n} = \frac{1.02489 \times 10^7}{25} = 409957 \text{ N/m} \quad (3.6)$$

Os nós dos elementos *COMBIN14* que não estão ligados ao ecrã foram fixos. A Figura 3.17 apresenta uma vista em perspectiva da distribuição das molas lineares e as suas condições de fronteira:

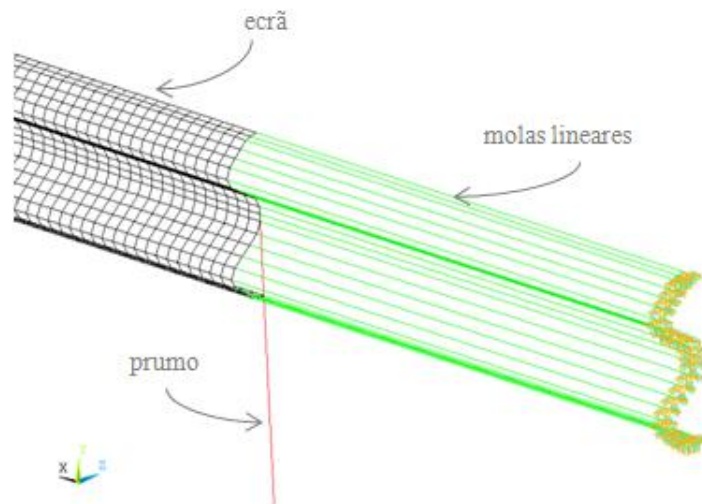


Figura 3.17: Distribuição das molas lineares e condições de fronteira

3.5.2.3 Modelação do solo

O solo foi modelado segundo o método de Plaxiccó (subcapítulo 3.3.2) e os valores para as curvas força – alongamento, para cada uma das molas, foram retirados das curvas da Figura 3.9 e da Figura 3.10. Uma vez que as molas devem possuir um comportamento não linear, foi utilizado o elemento *COMBIN39*. Este elemento possui os mesmos graus de liberdade que o *COMBIN14* (ver Figura 3.16). A direcção segundo a qual a mola funciona deve ser definida no programa (segundo o eixo *XX*, *YY* ou *ZZ*) e é necessário introduzir os vários valores de rigidez da mola em função do alongamento da mola (Figura 3.9 e Figura 3.10). Este elemento é definido com os seus dois nós coincidentes. A localização destes elementos na Figura 3.18 é visível através das condições de fronteira de deslocamento imposto (nós fixos) aplicadas aos nós coincidentes com os nós do prumo onde a mola está definida. Uma vez que Plaxiccó não define nenhuma reacção segundo o eixo dos prumos restringiram-se os

movimentos nesta direcção nos nós que se encontram à cota mais inferior dos prumos. Foram utilizados 60 elementos *COMBIN39* (10 por prumo) para modelar o solo.

3.5.2.4 Apresentação do modelo

O modelo de 10m da guarda de segurança é apresentado nas figuras 3.18, 3.19 e 3.20:

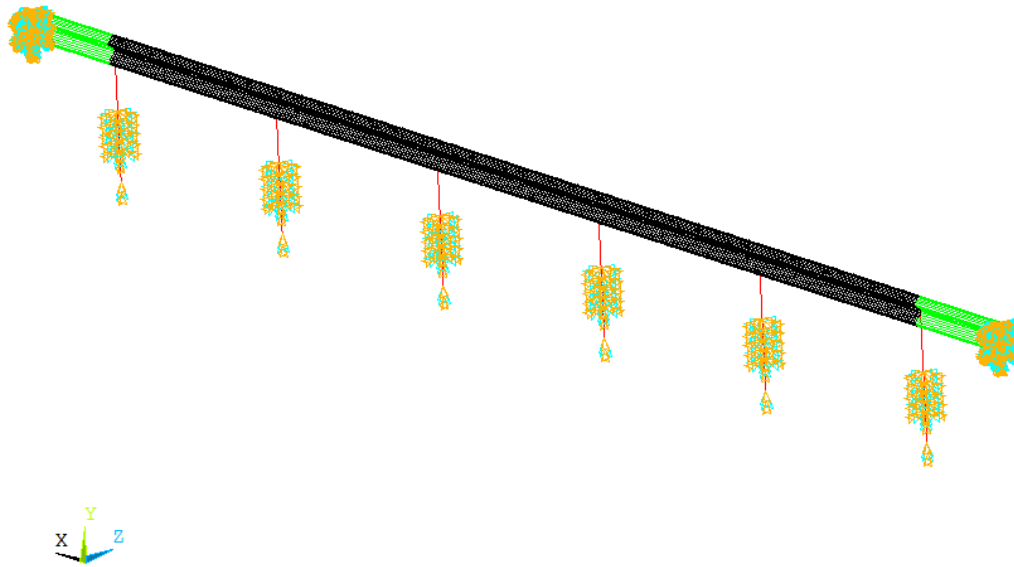


Figura 3.18: Modelo em elementos finitos da guarda de segurança em W visto em perspectiva

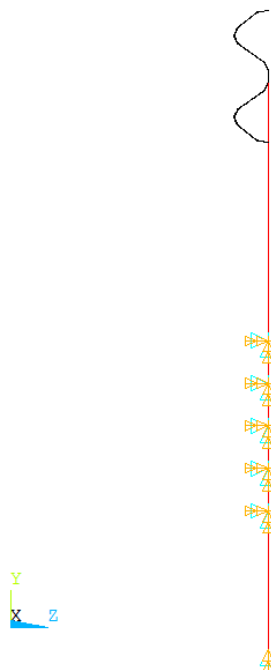


Figura 3.19: Alçado direito do modelo em elementos finitos da guarda de segurança em W

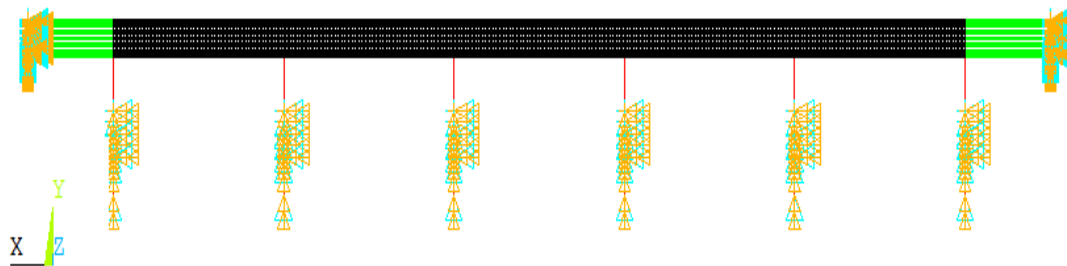


Figura 3.20: Vista frontal do modelo em elementos finitos da guarda de segurança em W

Este modelo possui 9818 elementos, 10231 nós, 61056 graus de liberdade como vem apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Número de elementos usados para o estudo da guarda de segurança em W.

Número de elementos	Número de nós	Número de graus de liberdade
9818	10231	61056

3.5.3. Modelo de material

Uma vez que durante um choque a guarda de segurança sofre grandes deformações e consequentemente plastifica, foi necessário definir o comportamento do material tanto na zona de deformação elástica como plástica. De forma a reproduzir-se este comportamento do material usaram-se os valores definidos na Tabela 2.1 para o aço S235JR [14] e construiu-se uma aproximação da curva de tensão – extensão do material do ecrã (Figura 3.21).

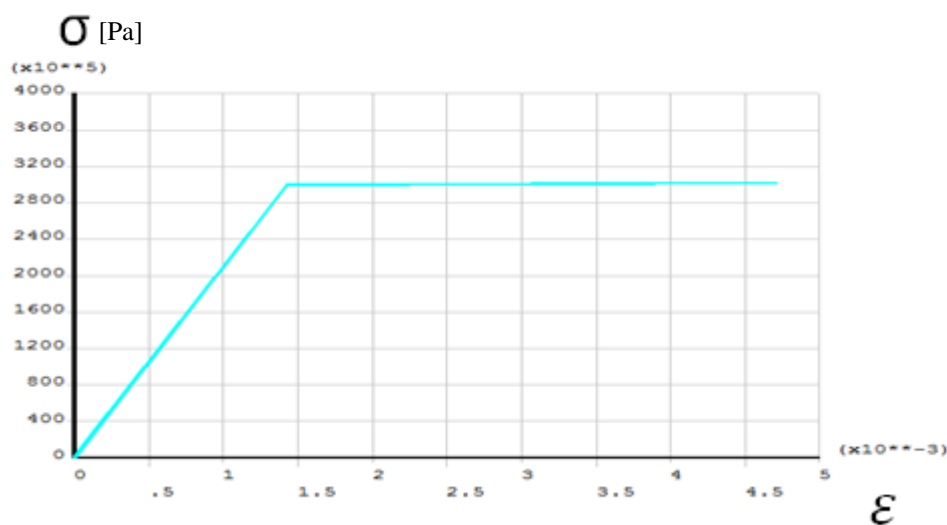


Figura 3.21: Aproximação da curva tensão – extensão do aço S235JR

É de referir que o declive mais acentuado apresentado na Figura 3.21 tem por valor o módulo de Young e representa o comportamento do material na zona elástica. O declive menos acentuado tem por valor o módulo tangente e simula a zona de deformação plástica.

O material dos prumos apesar de ser o mesmo que o do ecrã não possui o mesmo comportamento que o apresentado na Figura 3.21 pois apenas interessa estudar a plastificação do ecrã. Assim sendo os prumos foram modelados com um material com comportamento linear e cujo módulo de Young é de 210GPa e o coeficiente de Poisson ν^0 é igual a 0.3.

3.5.4. Carregamento aplicado

Para simplificação da análise, as forças produzidas durante o impacto foram aplicadas estaticamente. O seu valor foi calculado através da análise do impacto ilustrado pela Figura 3.11 analisando o gráfico das acelerações longitudinais medidas no centro de gravidade do veículo (Figura 3.22) [11] e considera que o veículo faz um ângulo de 25° com a guarda de segurança no momento exactamente anterior ao impacto tal como sugere o *NCHRP Report 350* [15]. As Figuras 3.11 e 3.22 são referentes ao mesmo embate bastando para isso relacionar o instante de cada uma das imagens da Figura 3.11 com a aceleração do teste de impacto real lida na Figura 3.22.

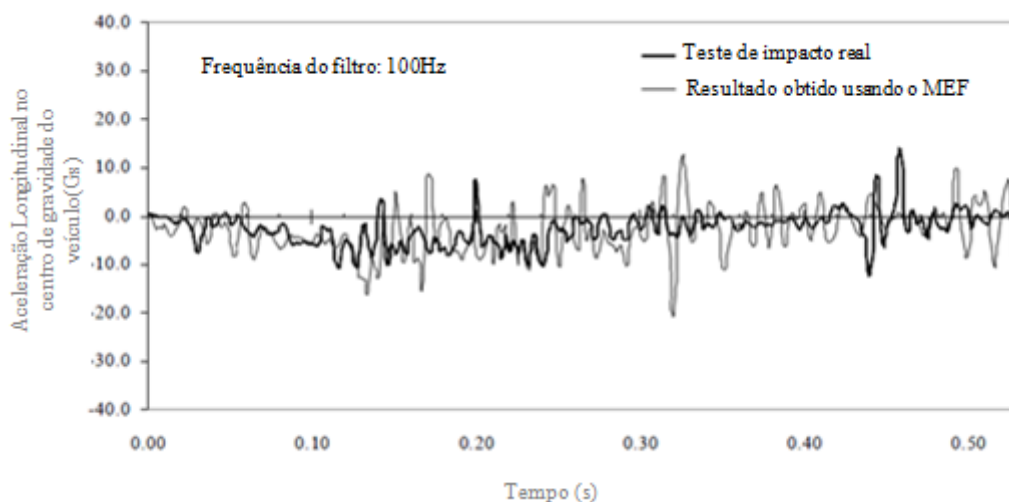


Figura 3.22: Acelerações longitudinais no centro de gravidade do veículo [11]

Com base na Figura 3.11 [11] foi decidido que a análise do embate com interesse para a simulação ocorre entre os instantes $t = 0.006s$ e $t = 0.239s$ já que é nestes momentos que a barreira sofre maiores deformações. Foi então construída a Figura 3.23 que esquematiza, através

de uma vista de topo da guarda de segurança em W , a forma como os quatro casos de carga foram aplicados nesta dissertação:

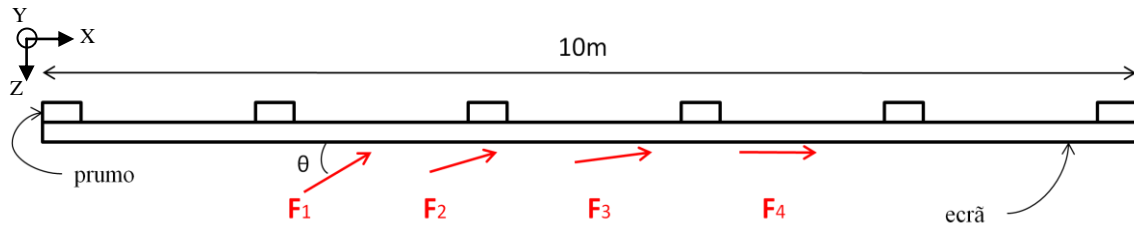


Figura 3.23: Vista de topo da aplicação dos casos de carga na guarda de segurança

Utilizando a segunda lei de Newton em conjunto com a Figura 3.22 [11] e tendo em atenção que 1G são 9.81 m/s^2 foi possível calcular os quatro casos de carga pretendidos. Exemplificando para o calculo do primeiro caso de carga ($t= 0.006\text{s}$):

$$F = \eta a = 2000 \times 9.81 \times 4 = 78480 \text{ N} \quad (3.7)$$

Efectuando o mesmo raciocínio para os outros três instantes de interesse construi-se a Tabela 3.2 em que o ponto de aplicação é calculado a partir do 1º prumo modelado:

Tabela 3.2: Casos de carga do impacto entre a guarda de segurança e o veículo

Caso de carga i	Instante [s]	Intensidade da Força F_i [N]	Ângulo θ entre o veiculo e o ecrã [°]	Ponto de aplicação x_i [m]
1	0.006	78480	26	2.6
2	0.121	206010	21	4
3	0.181	176580	14	5.7
4	0.239	215820	0	6.2

De forma a evitar problemas de concentrações de tensões num único nó, aplicou-se cada caso de carga em todos os nós que possuem a mesma coordenada segundo o eixo XX que o ponto de aplicação da Tabela 3.2 (ver Figura 3.24). O valor da carga a aplicar em cada nó é igual ao valor do caso de carga da Tabela 3.2 a dividir pelos 25 nós que têm a mesma coordenada em XX .

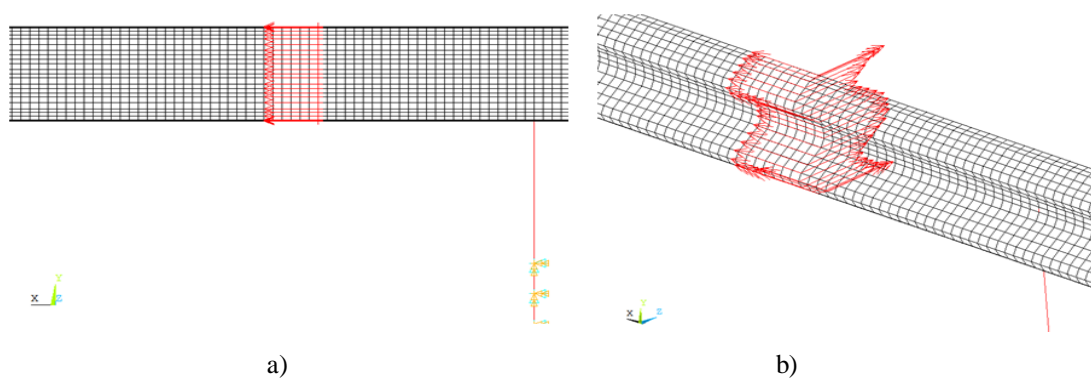


Figura 3.24: Aplicação das forças a) vista frontal b) em perspectiva

A Figura 3.25 apresenta uma vista em perspectiva da barreira de segurança com os quatro casos de carga aplicados:

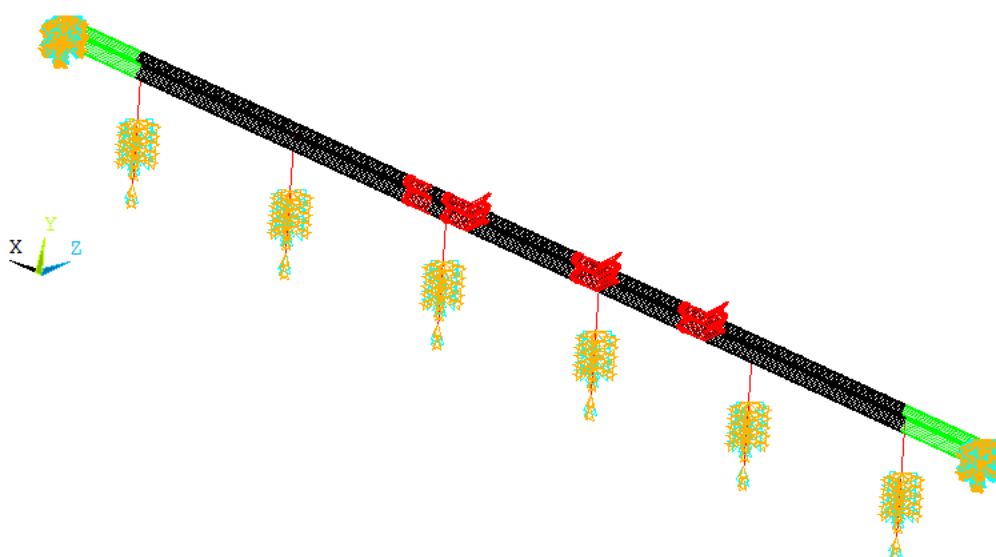


Figura 3.25: Vista em perspectiva dos quatro casos de carga aplicados na guarda de segurança rodoviária em *W*

Capítulo 4

Resultados da análise de uma guarda de segurança rodoviária em W

Neste capítulo vão ser apresentados os resultados da análise estática utilizando o modelo descrito no subcapítulo 3.4. A resposta da barreira foi obtida aplicando cada um dos casos de carga separadamente. Uma vez que o comportamento das molas que simulam a rigidez do solo e do material do ecrã é não linear, foi necessário efectuar uma análise estática não linear ao modelo no programa comercial ANSYS.

4.1. Caso de carga 1

Em seguida apresentam-se as imagens com os resultados do primeiro caso de carga (ver tabela 3.2) aplicado no ecrã conforme ilustrado na Figura 3.24.

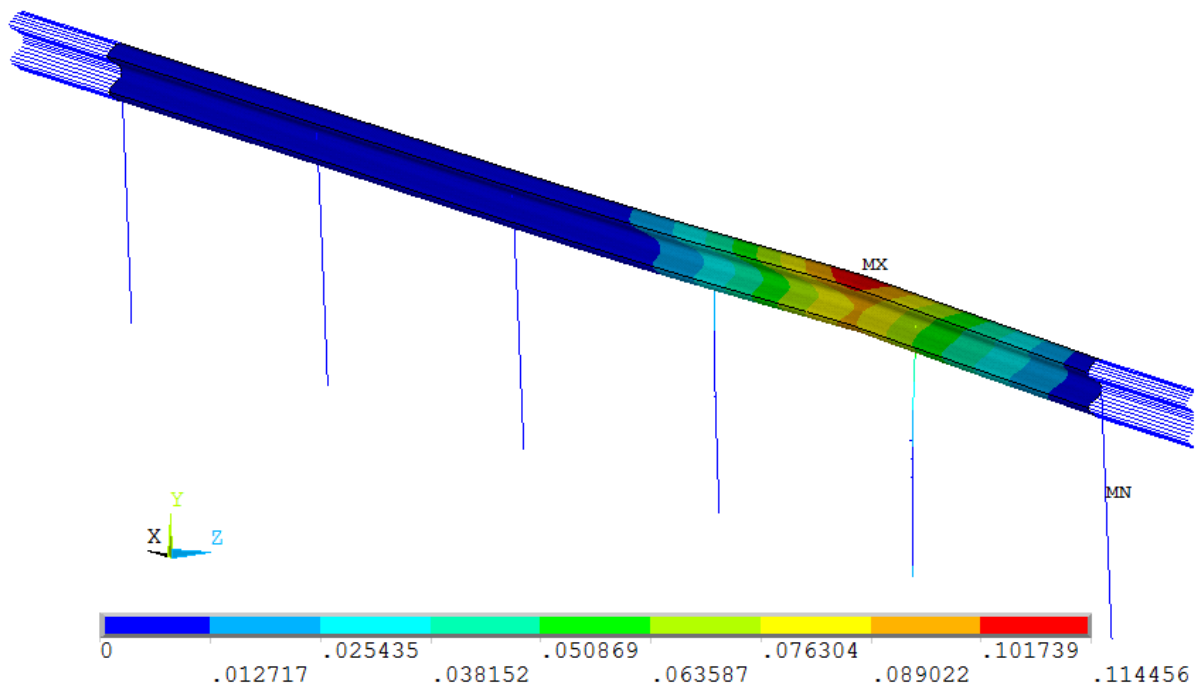


Figura 4.1: Deslocamentos provocados pelo caso de carga 1

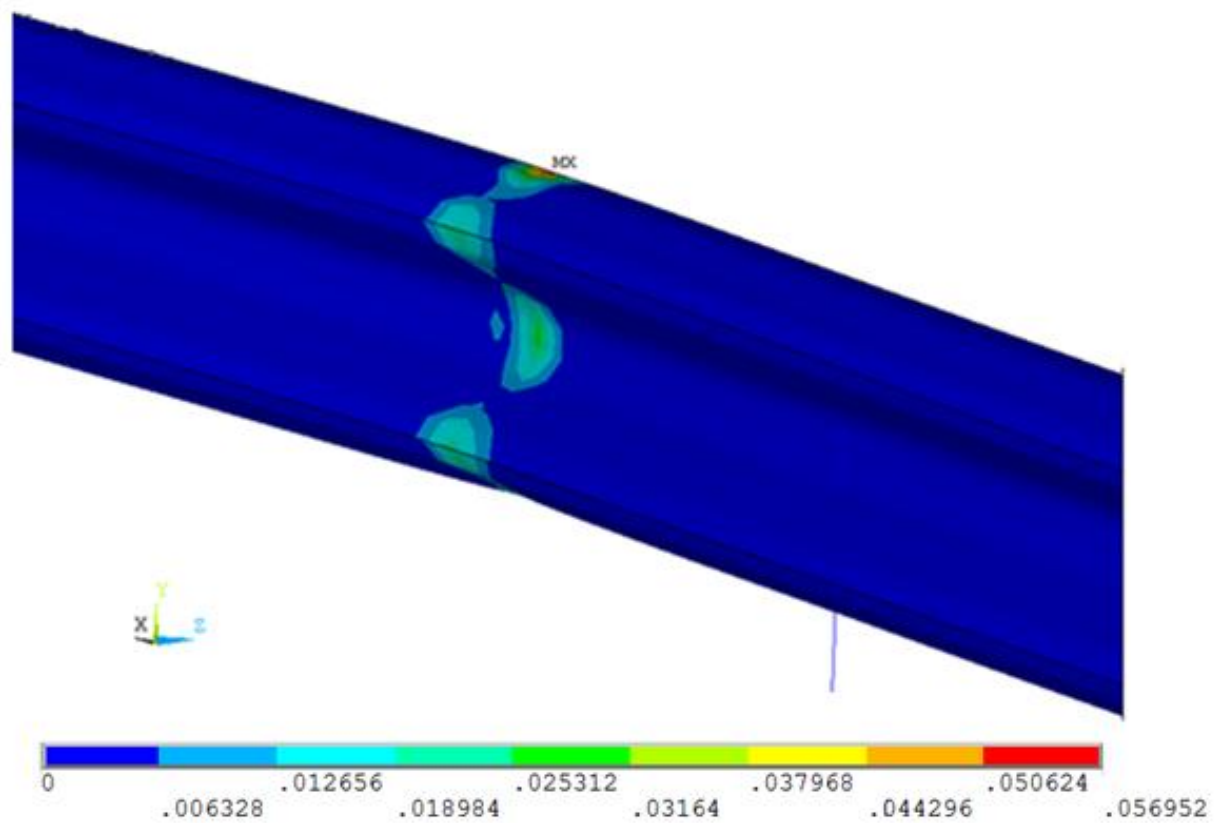


Figura 4.2: Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 1

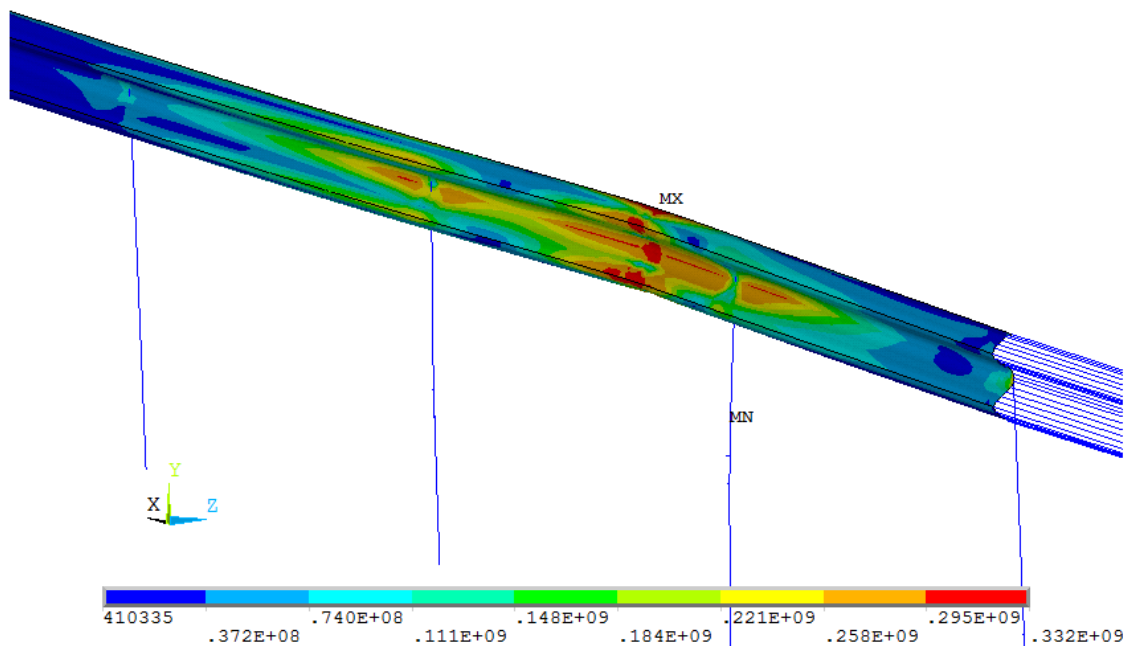


Figura 4.3: Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 1

O primeiro caso de carga provocou um deslocamento máximo de 114.4mm, uma extensão máxima de 0.056 e uma tensão máxima de 332MPa.

4.2. Caso de carga 2

Os resultados são apresentados nas Figuras 4.4 a 4.6:

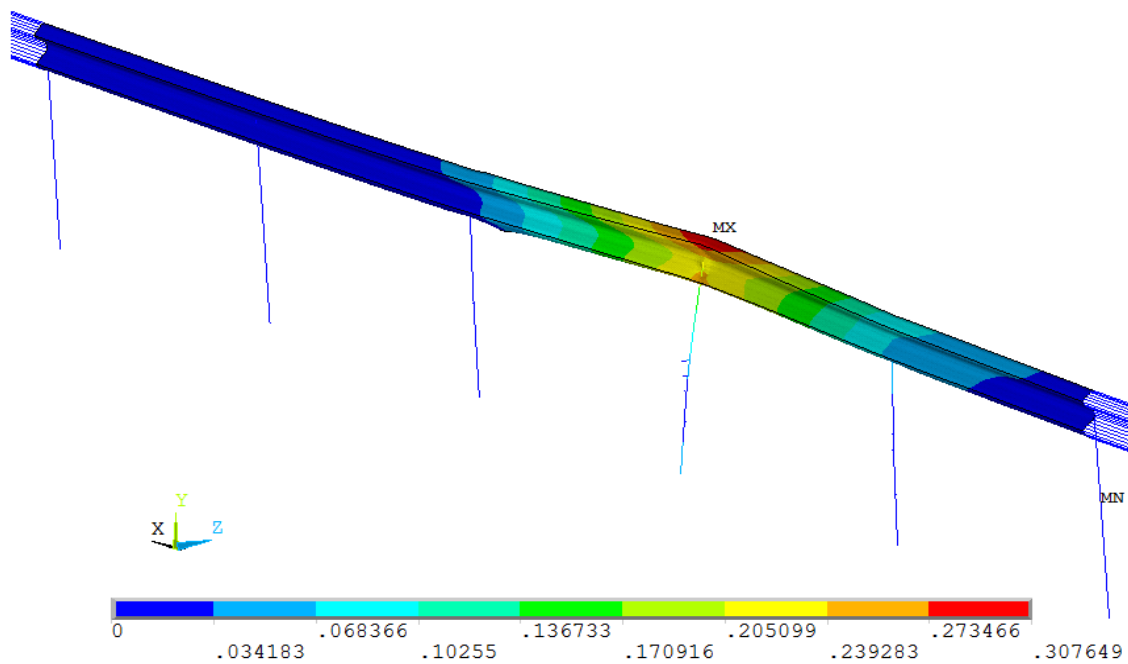


Figura 4.4: Deslocamentos provocados pelo caso de carga 2

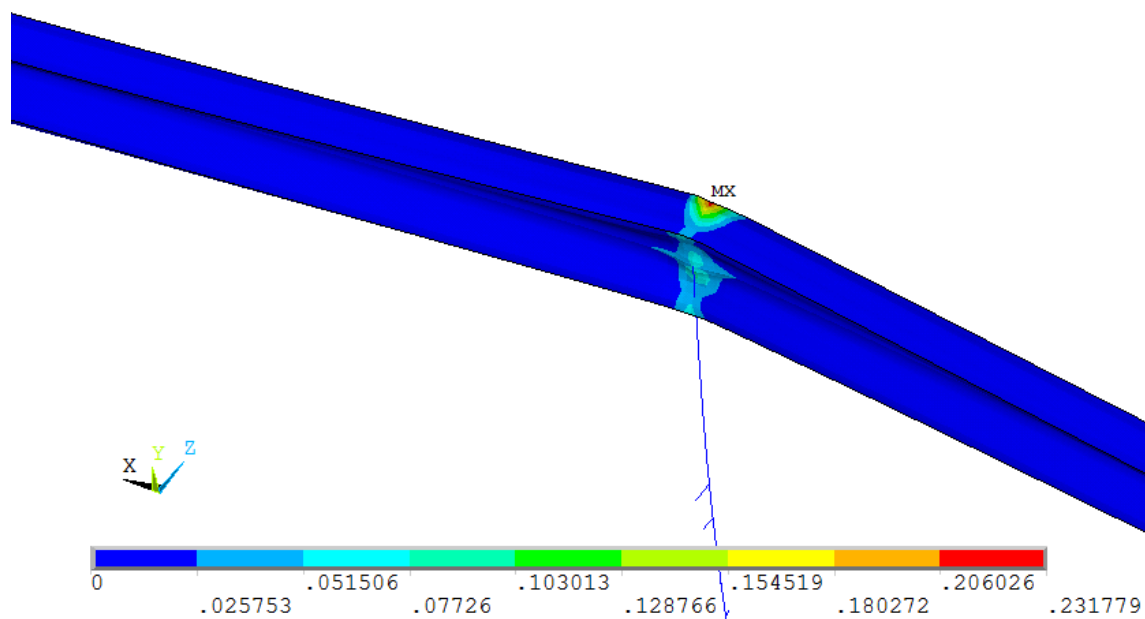


Figura 4.5: Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 2

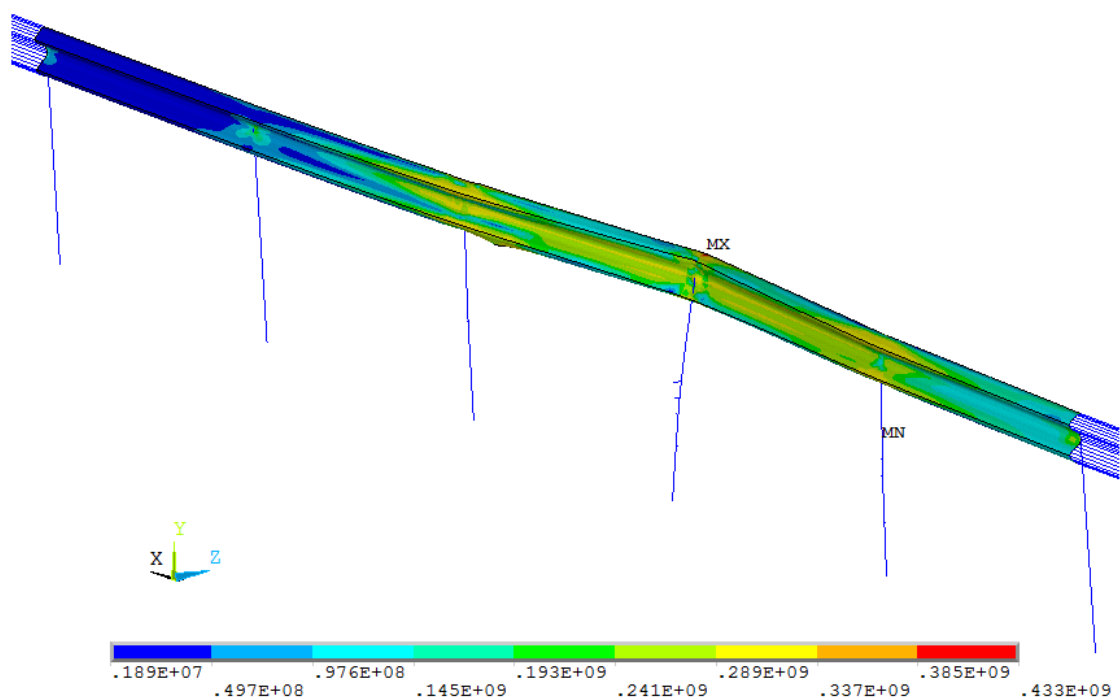


Figura 4.6: Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 2

Analisando as Figuras 4.4 a 4.6 constata-se que o segundo caso de carga provoca uma deformação máxima de 307.6mm, uma extensão máxima de 0.232 e uma tensão máxima de Von Mises de 433MPa.

4.3. Caso de carga 3

As próximas figuras apresentam os resultados obtidos para o terceiro caso de carga aplicado no ecrã da guarda de segurança rodoviária em W (Figuras 4.7 a 4.9).

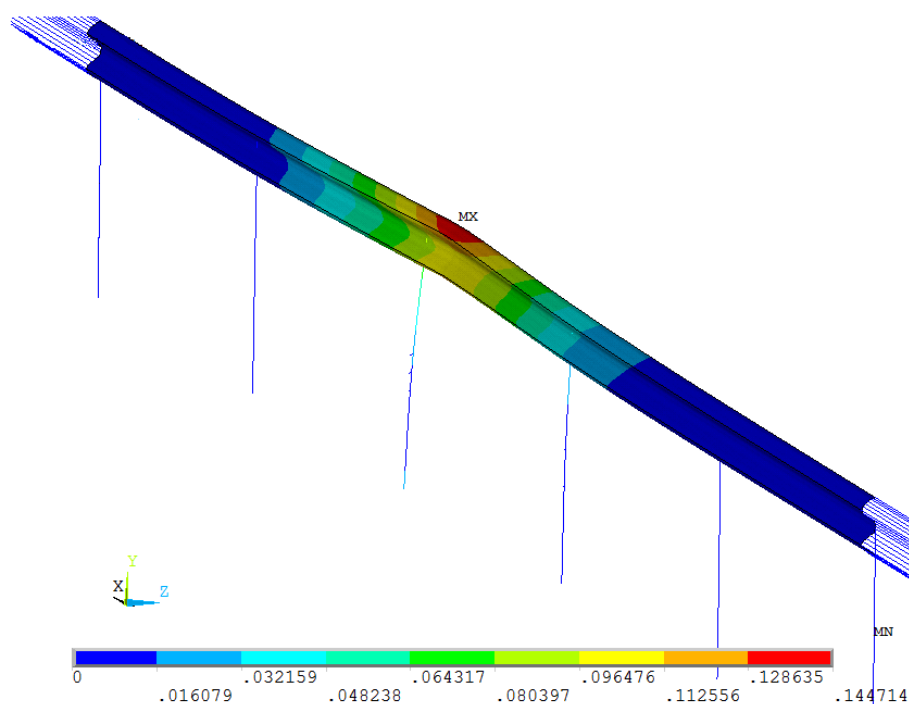


Figura 4.7: Deslocamentos provocados
pelo caso de carga 3

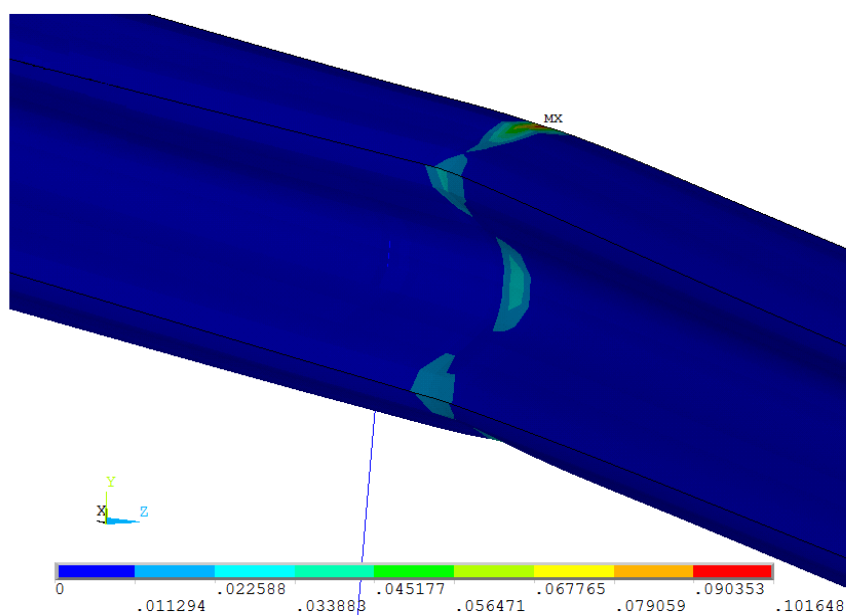


Figura 4.8: Extensões de Von Mises provocadas
pelo caso de carga 3

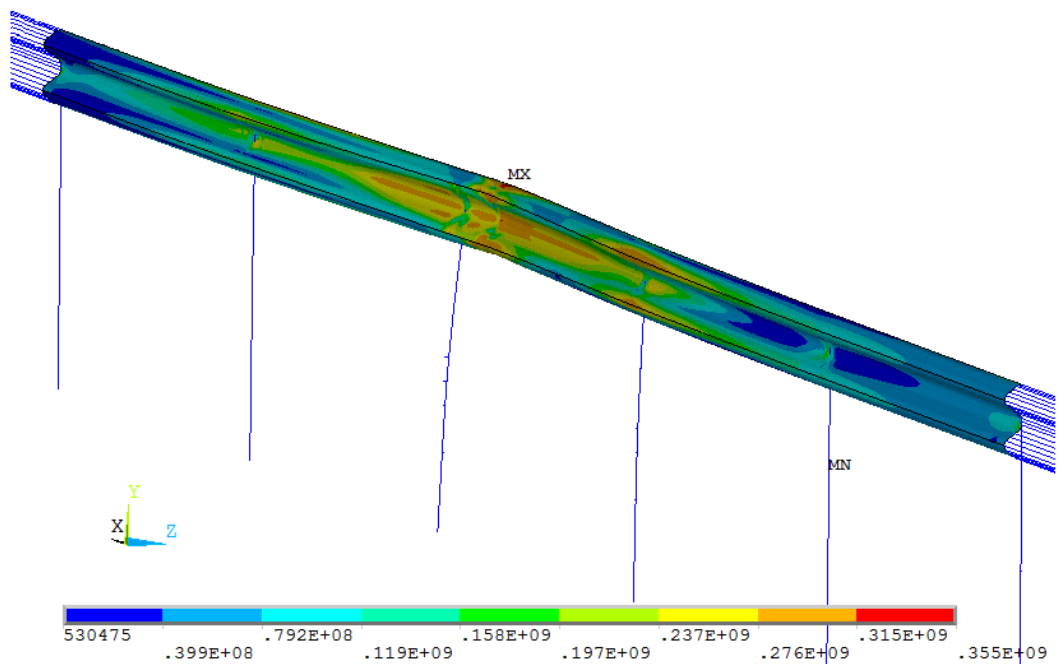


Figura 4.9: Tensões de Von Mises provocadas
Pelo caso de carga 3

O terceiro caso de carga provoca na guarda de segurança um deslocamento máximo de 144.7mm, uma extensão máxima de 0.102 e uma tensão máxima de 355MPa.

4.4. Caso de carga 4

Os resultados obtidos são apresentados em seguida (Figuras 4.10 a 4.13).

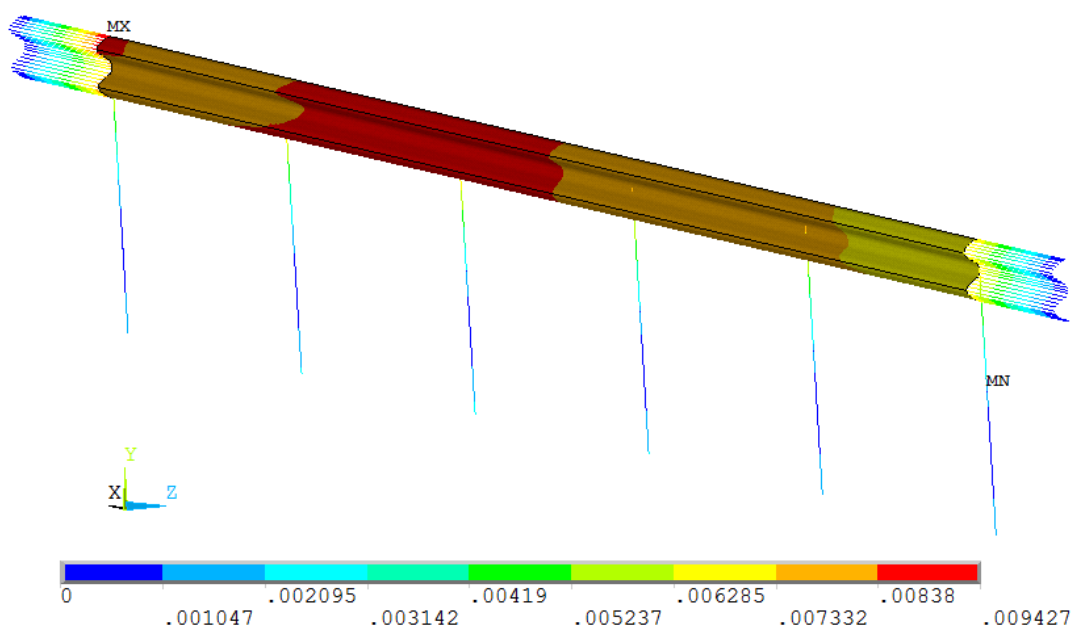


Figura 4.10: Deslocamentos provocados pelo caso de carga 4

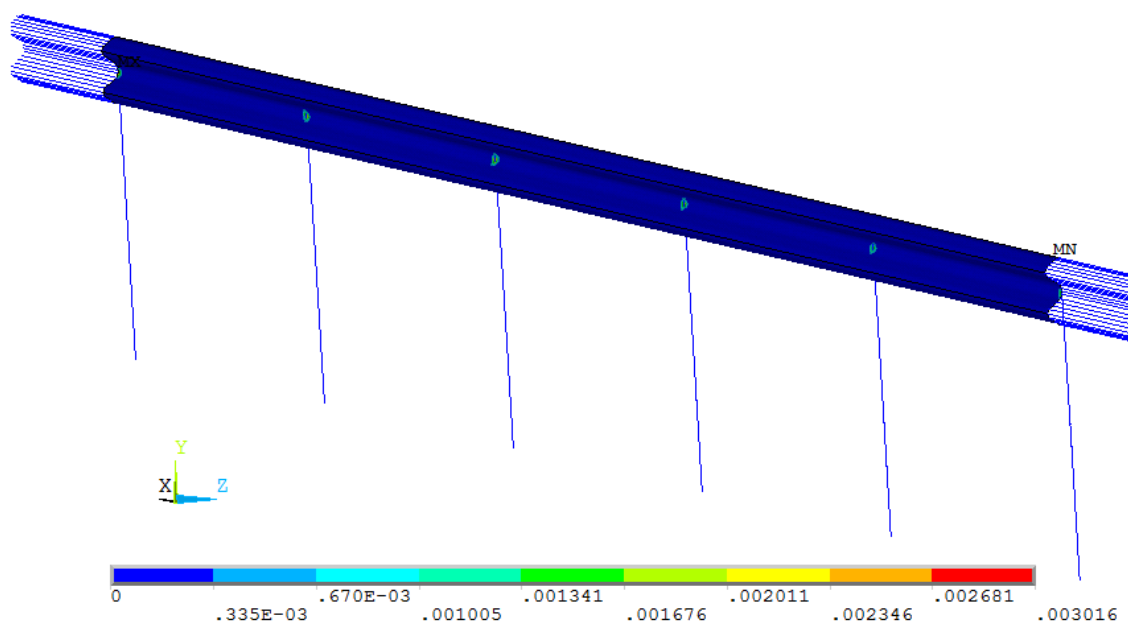


Figura 4.11: Extensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 4

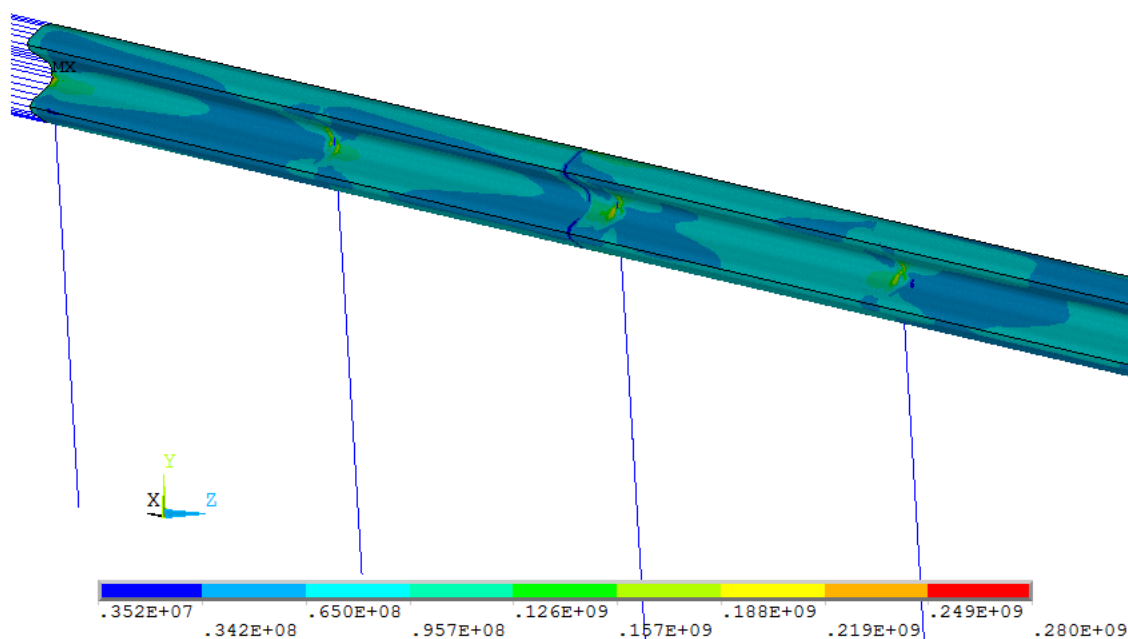


Figura 4.12: Tensões de Von Mises provocadas pelo caso de carga 4

De acordo com as Figuras 4.10 a 4.13, o quarto caso de carga faz com que a barreira sofra uma deformação máxima de 9.4mm, uma extensão máxima de 0.003 e uma tensão máxima de Von Mises de 280MPa.

4.5. Análise de resultados

De forma a facilitar a análise dos resultados apresentados anteriormente veja-se a Tabela 4.1 que resume os valores máximos da deformação, tensão e extensão da guarda de segurança para cada caso de carga:

Tabela 4.1: Resultados de deslocamento, tensão e extensão para cada caso de carga do impacto entre a guarda de segurança e o veículo

Caso de carga	Deslocamento máximo [mm]	Tensão máxima de Von Mises [MPa]	Extensão máxima de Von Mises
1	114.4	332	0.056
2	307.6	433	0.232
3	144.7	355	0.102
4	9.4	280	0.003

Ao analisar os resultados da Tabela 4.1 constata-se que os casos de carga cujo ângulo de aplicação no ecrã difere de 0° (Tabela 3.2) provocam uma tensão máxima superior à tensão de cedência do material (300 MPa) plastificando o ecrã. Tal deve-se ao facto de estes casos de carga possuírem uma componente perpendicular ao ecrã que provoca a flexão do mesmo. Apesar das simplificações efectuadas no modelo e da diferença na geometria dos prumos Americanos e Franceses (secção transversal em *I* e em *C*, respectivamente), o resultado obtido para a deslocamento máximo, 307.6 mm, está próximo do valor de 339 mm encontrado por Ali O. Atahan em [18].

Uma vez que o caso de carga 2 é o que provoca maiores deformações é de interesse analisar os seus efeitos no material da guarda de segurança. Comparando os valores de 433 MPa para a tensão máxima de Von Mises e de 0.232 para a extensão máxima de Von Mises com os obtidos pela leitura da curva de tensão – extensão real de um aço genérico [21], constata-se que os resultados obtidos estão muito próximos dos valores da tensão de máxima real 420MPa e da extensão de rotura real 0.25. Tal significa que o ecrã quando solicitado à carga máxima de teste se encontra próximo do limite de resistência do material e que um aumento da intensidade do impacto causaria a rotura da guarda de segurança rodoviária em *W*.

Capítulo 5

Optimização topológica de estruturas.

Nesta dissertação pretende-se desenvolver uma guarda de segurança que para uma determinada fracção volúmica seja a mais rígida possível. Trata-se, portanto, de um problema de optimização. Em geral, existem três categorias diferentes de optimização de uma estrutura.

A primeira categoria, chamada de optimização dimensional, tem como objectivo alterar as dimensões da estrutura para torná-la mais eficiente segundo um determinado objectivo. Por exemplo, optimizar as dimensões das secções transversais das barras de uma treliça.

A segunda categoria utilizada para optimizar uma estrutura é a optimização de forma. Aqui considera-se que a fronteira da estrutura é composta por diversos nós e pretende-se determinar a localização destes no espaço para tornar a estrutura mais eficiente. No entanto, tal como na optimização dimensional, a topologia da estrutura encontra-se definida à partida e não pode ser alterada, ou seja, as conectividades entre os vários nós permanecem as mesmas ao longo de todo o processo o que faz com que o resultado obtido dependa da topologia inicial o que poderá corresponder a uma solução que não é a melhor de todas.

Para contornar este problema existe uma terceira categoria: a optimização topológica. Ao contrário das duas categorias anteriores, a topologia varia. Esta categoria é portanto a que

apresenta maior potencial para determinar a secção transversal de uma guarda de segurança que seja mais eficiente do ponto de vista da rigidez. Em seguida, apresenta-se a descrição detalhada da optimização topológica em geral para problemas de minimização da flexibilidade sujeitos a um constrangimento de volume.

5.1. Formulação do problema de optimização

Em seguida vão ser apresentadas as formulações do problema de optimização para o caso de carga singular e múltiplo onde se pretende minimizar a flexibilidade (*compliance*) da estrutura, sujeita a um constrangimento de volume. Depois vai ser apresentada a formulação do mesmo problema mas com a presença de pontos de regiões de não *design* no domínio de projecto.

5.1.1. Caso de carga singular

A optimização topológica de problemas de minimização da flexibilidade (ou seja de maximização da rigidez) de uma estrutura sujeita a um constrangimento de volume permite resolver problemas de distribuição de material num dado domínio de projecto colocando o material disponível nos locais onde este é mais necessário e retirando-o nos locais onde a sua presença não é essencial. O resultado obtido é uma estrutura com a distribuição do material disponível que a torna mais eficiente do ponto de vista da rigidez. Na Figura 5.1a) apresenta-se um exemplo de optimização topológica de uma viga em consola sujeita a um constrangimento de volume de 50% e uma carga concentrada aplicada F . A Figura 5.1b) foi obtida correndo o código de optimização topológica de 99 linhas escrito em Matlab por O.Sigmund [13] para este problema.

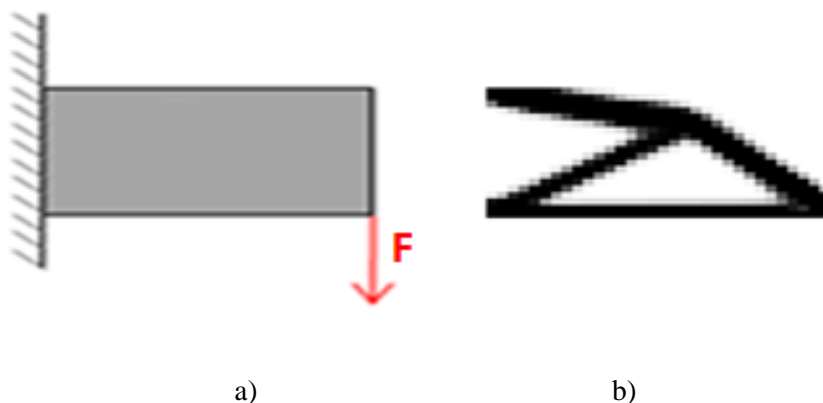


Figura 5.1: Optimização topológica de uma viga em consola.

a) domínio de projecto b) estrutura óptima

Num problema de minimização da flexibilidade (*compliance*) apenas as dimensões do domínio de projecto, as condições de fronteira, as cargas aplicadas e o volume máximo de material admissível são definidos à partida o que faz com que a estrutura não tenha nenhuma geometria pré-definida no início do problema. Na Figura 5.2 apresenta-se um domínio de projecto com volume Ω e condições de fronteira aplicadas: força volúmica f , um carregamento exterior distribuído t na fronteira Γ_T assim como os deslocamentos impostos ao longo da fronteira Γ_U .

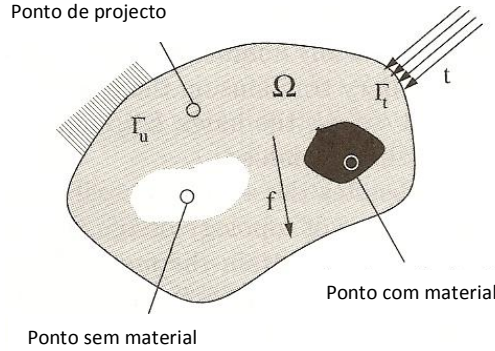


Figura 5.2: Domínio de projecto [6]

Tendo em conta que uma elevada flexibilidade, ou *compliance*, de uma estrutura tem como consequência um maior deslocamento do ponto de aplicação da carga, é possível formular o problema de maximização da rigidez estrutural como sendo equivalente à minimização do trabalho realizado pelas forças exteriores aplicadas.

Assim sendo uma forma de resolver o problema de optimização topológica apresentado na Figura 5.2 é considerar que existe um tensor de rigidez E_{ijkl} variável ao longo de todo o domínio de projecto Ω [6]. Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais e deslocamentos virtuais:

$$W_{Ext_v}(u_v) = W_{Int_v}(u_r, u_v) \quad (5.1)$$

$$\int_{\Omega} f u_v d\Omega + \int_{\Gamma_T} t_r u_v d\Gamma_T = \int_{\Omega} \sigma_{kl_r} \varepsilon_{kl_v}(u_v) d\Omega \quad (5.2)$$

pela Lei de Hooke:

$$\int_{\Omega} f u_v d\Omega + \int_{\Gamma_T} t_r u_v d\Gamma_T = \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij_r}(u_r) \varepsilon_{kl_v}(u_v) d\Omega \quad (5.3)$$

Onde u_v são os deslocamentos virtuais, u_r os deslocamentos provocados pelo conjunto de forças “reais” t_r aplicadas, f força volúmica em Ω , σ_{kl_r} e $\varepsilon_{ij_r}(u_r)$ os estados de tensão e de extensão provocados por t_r e $\varepsilon_{kl_v}(u_v)$ as extensões provocadas pelo deslocamento virtual.

Tendo em conta que as extensões são do tipo (tensor das deformações de Cauchy):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (5.4)$$

e sabendo que o trabalho das forças exteriores é igual a:

$$W_{Fext_r}(u_r) = \int_{\Omega} f \cdot u_r \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} t_r \cdot u_r \, d\Gamma_T \quad (5.5)$$

é possível formular o problema de minimização da flexibilidade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{u_r \in \mathbf{U}} \quad & W_{Fext_r}(u_r) \\ \text{s. a:} \quad & W_{Fext_v}(u_v) = W_{Fint_v}(u_r, u_v) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$E \in \mathbf{E}_{adm}$$

onde \mathbf{U} representa o conjunto de vectores de deslocamento admissíveis e \mathbf{E}_{adm} representa o conjunto de tensores de rigidez admissíveis.

Uma vez que uma guarda de segurança é constituída por aço S235JR [9] um material isotrópico, existe um tensor de rigidez constante E_{ijkl}^0 que o caracteriza. Assim sendo o objectivo é encontrar o conjunto de \mathbf{E}_{adm} que satisfaça a seguinte condição:

$$E_{ijkl} = \varpi \times E_{ijkl}^0; \quad \varpi = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um ponto com material dentro de } \Omega, \\ 0 & \text{se } x \text{ é um ponto sem material dentro de } \Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

É de notar que a soma de todos os ϖ existentes vai ser igual ao volume total da estrutura (pontos onde existe material). Uma vez (5.7) definido, passa a ser possível introduzir o constrangimento de volume V_{maximo} que vai limitar o volume total da estrutura:

$$\int_{\Omega} \varpi d\Omega = V_{estrutura}(\varpi) \leq V_{maximo} \quad (5.8)$$

A forma numericamente mais conveniente para resolver um problema deste tipo, segundo [6], é transformar as variáveis discretas ϖ de 0 e 1 em variáveis contínuas de densidade, 0 até 1, introduzindo-se em seguida um esquema de penalização que faça com que os valores tendam para os extremos do intervalo [0,1] no final do processo iterativo da optimização.

Nesta dissertação vai ser utilizado o esquema de penalização *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) que de acordo com [6] é muito eficaz. Com o uso do SIMP a equação (5.7) passa a ser escrita:

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0; \quad p > 1; \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1; \quad x \in \Omega \quad (5.9)$$

Em que $\rho(x)$ tem o nome de “densidade do material” e representa a presença (1) ou ausência (0) de material no ponto x do domínio de projecto Ω , p representa a penalização. O valor de E_{ijkl} no ponto x vai portanto variar entre 0 para $\rho(x) = 0$ e E_{ijkl}^0 para $\rho(x) = 1$.

O constrangimento de volume (5.8) fica com a forma:

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = V_{estrutura}(\rho(x)) \leq V_{maximo} \quad (5.10)$$

Quanto à penalização p Bendsøe e Sigmund [6] descrevem-na como um artifício que tem como função tornar as regiões com densidades intermédias pouco favoráveis pois estas acabam por contribuir muito pouco para o aumento da rigidez da estrutura no global em comparação com o volume que ocupam. O valor a dar a p deve satisfazer as seguintes equações [6]:

$$\begin{aligned} p &\geq \max \left\{ \frac{2}{1-v^0}, \frac{4}{1+v^0} \right\} && \text{se } \Omega \text{ em } 2-D, \\ p &\geq \max \left\{ 15 \times \frac{1-v^0}{7-5v^0}, \frac{3}{2} \times \frac{1-v^0}{1-2v^0} \right\} && \text{se } \Omega \text{ em } 3-D, \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim sendo, para um coeficiente de Poisson $\nu^0 = 0.3$, p deve ser sempre superior ou igual a 3.08 se Ω em 2-D e a 2.625 se em 3-D. No entanto Bendsøe e Sigmund [6] aconselham o uso de $p > 3$ para problemas em 3-D.

Tendo em conta tudo o que foi descrito até ao momento neste subcapítulo, a formulação (5.6) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{u_r \in U, \rho} \quad & W_{Fext_r}(u_r) \\ \text{s. a:} \quad & W_{Fext_v}(u_v) = W_{Fint_v}(u_r, u_v) \quad , \quad \text{para todos os } u_v \in U \\ & E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \quad , \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = V_{estrutura}(\rho(x)) \leq V_{maximo} \quad ; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1$$

O parâmetro ρ_{min} foi introduzido porque evita que a matriz de rigidez seja singular. Bendsøe e Sigmund [6] afirmam que o mais comum é definir $\rho_{min} = 10^{-3}$ [6]. A formulação (5.12) denomina-se de formulação segundo o princípio dos trabalhos virtuais para o problema de optimização topológica de minimização da flexibilidade.

Em geral são utilizados elementos finitos para resolver numericamente problemas como (5.12). Para isso discretiza-se o domínio de projecto Ω com uma malha de elementos finitos. Associa-se a cada elemento finito uma densidade ρ e um tensor de rigidez E (constantes no elemento).

O trabalho das forças exteriores passa a ser calculado da seguinte forma:

$$W_{Fext} = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \tag{5.13}$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vectores de força e de deslocamento. Relacionando a equação (5.13) com a lei de Hooke:

$$\mathbf{K}(E_e) \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{5.14}$$

em que $\mathbf{K}(E_e)$ é a matriz de rigidez global do sistema e relaciona-se com a matriz de rigidez de cada um dos N elementos através de:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(E_e) \quad (5.15)$$

e que aplicando o SIMP à equação (5.15) obtém-se:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e(E_e) \quad (5.16)$$

é possível escrever a formulação do problema de minimização da flexibilidade (5.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \rho_e} \quad & W_{Fext} = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s. a:} \quad & \left(\sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e(E_e) \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & \sum_{e=1}^N vol_e \rho_e \leq V_{maximo} ; 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 ; e = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde vol_e representa o volume de um elemento. À formulação (5.17) dá-se o nome de formulação de elementos finitos para o problema de optimização topológica de minimização da flexibilidade definido em (5.12).

5.1.2. Múltiplos casos de carga

Em optimização topológica pode ser necessário optimizar uma estrutura em que os casos de carga a suportar não são aplicados em simultâneo. Neste tipo de situações, o resultado obtido será uma estrutura mais estável no caso de apenas um dos casos de carga ser aplicado. Na Figura 5.3 a) apresenta-se um exemplo no qual a optimização gera resultados diferentes dependendo se F_1 e F_2 são aplicadas simultaneamente (Figura 5.3b) ou uma de cada vez com igual importância (Figura 5.3c). A figura foi obtida correndo o código de 99 linhas escrito em

Matlab por O.Sigmund [13] sendo o domínio de projecto discretizado por 60×20 elementos, $p=3$ e uma fracção volúmica de 25%:

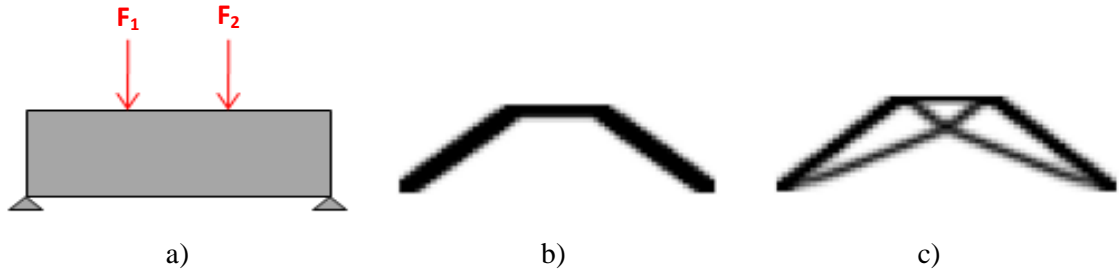


Figura 5.3: Exemplo de optimização topológica com dois casos de carga:

a) domínio de projecto e condições de fronteira, b) caso de carga único e c) com dois casos de carga.

Como se pode constatar a aplicação de apenas uma das cargas na solução da Figura 5.3 b) faz com que a estrutura se torne instável e sofra deformações importantes. No entanto a estrutura apresentada na Figura 5.3 c) tal não acontece pois as duas barras suplementares colocadas no meio da estrutura aumentam a estabilidade da mesma.

Um problema com M casos de carga é formulado de maneira semelhante à feita em (5.12) e (5.17). A grande diferença é que ao invés de se calcular apenas uma flexibilidade é necessário calcular M flexibilidades e em seguida efectuar uma média ponderada na qual se afecta cada uma das flexibilidades pela importância dada a cada caso de carga. Por exemplo, no caso de 4 forças aplicadas todas com o mesmo peso, cada uma das flexibilidades será afectada por um coeficiente ou peso de 0.25. Chamando w^k ao peso da força número k na optimização, a formulação (5.12) passa a escrever-se:

$$\min_{u_r^k \in U, \rho} \sum_{k=1}^M w^k W_{F_{ext_r}}^k(u_r^k) \quad , \quad \text{com} \quad \sum_{k=1}^M w^k = 1$$

$$s. a: \quad W_{F_{ext_v}}^k(u_v) = W_{F_{int_v}}^k(u_r^k, u_v) \quad , \quad \text{para todos os } u_v \in U, \quad k = 1, \dots, M, \quad (5.18)$$

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \quad , \quad x \in \Omega$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = V_{estrutura}(\rho(x)) \leq V_{maximo} \quad ; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1$$

5.1.3. Pontos de não *design*

Até agora foram descritos casos em que todos os pontos do domínio de projecto são de *design*, ou seja, que todos os elementos finitos da malha têm densidade variável.

No entanto, por razões funcionais pode ser necessário que determinadas zonas do domínio de projecto sejam sempre zonas sem material (por exemplo, um furo) ou zonas com material (por exemplo o tabuleiro de uma ponte).

De forma a resolver este problema atribui-se aos pontos de não *design* as densidades 1 ou 0, consoante se pretende que esses elementos tenham ou não material, e optimiza-se apenas o campo de densidades $\rho(x)$ dos pontos de *design*. Assim sendo o problema, para um caso de carga, passa a ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \min_{u_r \in \mathbf{U}, \rho} W_{Fext_r}(u_r) \\
 & \text{s. a:} \quad W_{Fext_v}(u_v) = W_{Fint_v}(u_r, u_v) \quad , \quad \text{para todos os } u_v \in U \\
 & E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \quad , \quad x \in \Omega^{design} \\
 & \int_{\Omega^d} \rho(x) d\Omega^d = V_{estrutura}(\rho(x)) \leq V_{maximo} \quad ; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde Ω^d representa a parte do domínio Ω onde estão apenas os pontos de design.

A Figura 5.4 apresenta dois exemplos obtidos utilizando o código de 99 linhas escrito em Matlab por O.Sigmund [13] para que este respeitasse as condições de fronteira pretendidas. A malha da Figura 5.4a) é composta por 60×20 elementos e a da Figura 5.4b) por 45×30 elementos. Os restantes parâmetros são $p=3$ e uma fracção volúmica de 25% na Figura 5.4a) e 50% na Figura 5.4b).

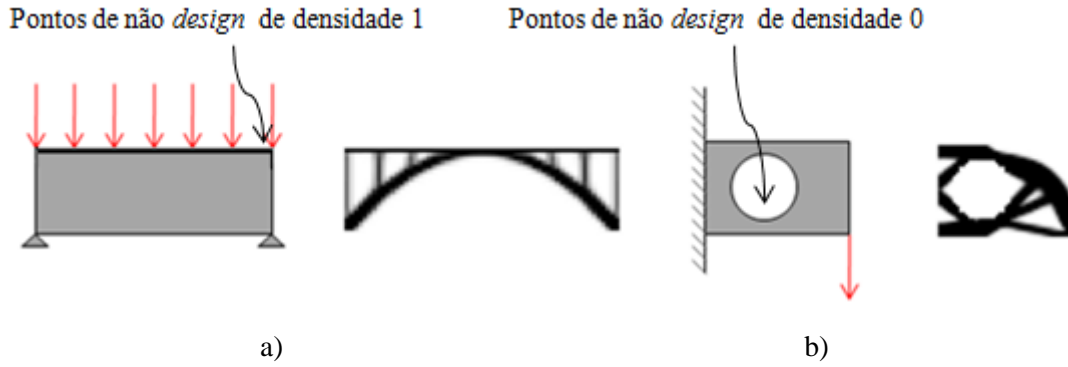


Figura 5.4: Exemplo de optimização topológica com pontos de não *design*: a) pontos de não *design* de densidade 1 (a preto), b) pontos de não *design* de densidade 0.01 (a branco)

5.2. Sensibilidades e algoritmos de optimização

5.2.1. Cálculo das sensibilidades

De forma a resolver os problemas com as formulações de (5.12), (5.17), (5.18) e (5.19) recorre-se a algoritmos de optimização [6]. É, portanto, de grande interesse calcular a derivada da flexibilidade em relação a ρ caso sejam aplicados algoritmos de optimização baseados no gradiente.

Considere-se de novo a formulação do problema de optimização (5.17). Chamando $c(\rho, \mathbf{u}(\rho))$ à função objectivo (flexibilidade) verifica-se que esta depende das variáveis de projecto ρ , por um lado, de forma explícita e, por outro lado, de forma implícita através do campo de deslocamento $\mathbf{u}(\rho)$, que é por sua vez uma função ρ e é solução da equação de equilíbrio $\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f}$. A formulação do problema de optimização pode então apresentar-se da seguinte forma apenas nas variáveis ρ :

$$\begin{aligned} \min_{\rho_e} \quad & c(\rho, \mathbf{u}(\rho)) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{e=1}^N vol_e \rho_e \leq V_{maximo} \quad ; \quad e = 1, \dots, N \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \tag{5.20}$$

O campo de deslocamento \mathbf{u} é solução do problema de equilíbrio mostrado em (5.17) que agora considera-se como parte de uma chamada a uma função ou rotina que corre a análise de elementos finitos para solução de \mathbf{u} .

O propósito aqui da análise de sensibilidade é determinar a dependência ou derivada total da função objectivo em relação a ρ . Visto que a flexibilidade é função de ρ e da função do deslocamento $\mathbf{u}(\rho)$, que por sua vez também é função ρ , torna-se necessário utilizar a regra da cadeia para obter a derivada total⁴ da flexibilidade $c(\rho, \mathbf{u}(\rho))$ em relação a ρ :

$$\frac{dc(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{d\rho} = \frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \rho} + \frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}(\rho)}{d\rho} \quad (5.21)$$

As derivadas parciais $\frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \rho}$ e $\frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \mathbf{u}}$ podem ser calculadas directamente a partir de $c(\rho, \mathbf{u}(\rho))$, mas a derivada $\frac{d\mathbf{u}(\rho)}{d\rho}$ não é tão simples de calcular. Recorrendo à equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}(\rho)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.22)$$

e derivando ambos os membros desta equação:

$$\frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\rho} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \rho} \quad (5.23)$$

Isolando o termo da derivada do deslocamento tem-se finalmente:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\rho} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \rho} - \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} \right] \quad (5.24)$$

substituindo este resultado em (5.21) obtém-se:

$$\frac{dc(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{d\rho} = \frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \rho} + \frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \rho} - \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} \right] \quad (5.25)$$

⁴ A derivada total utiliza-se para uma função de várias variáveis que, por sua vez, são funções de uma única variável. A derivada total é então a derivada em relação a essa última variável.

Em aplicações de engenharia com interesse real o cálculo directo de \mathbf{K}^{-1} é impraticável, por isso utiliza-se o método da variável adjunta, λ [22]:

$$\frac{dc(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{d\rho} = \frac{\delta c(\rho, \mathbf{u}(\rho))}{\delta \rho} + \lambda^T \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \rho} - \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} \right] \quad (5.26)$$

$$\lambda^T = \frac{\delta c}{\delta \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \quad (5.27)$$

$$\lambda = \mathbf{K}^{-1} \frac{\delta c}{\delta \mathbf{u}}^T \quad (5.28)$$

multiplicando ambos os membros por \mathbf{K} :

$$\mathbf{K}\lambda = \frac{\delta c}{\delta \mathbf{u}}^T \quad (5.29)$$

Sendo $c = \mathbf{f}^T \mathbf{u}$, vem:

$$\mathbf{K}\lambda = \mathbf{f} \quad (5.30)$$

Conclui-se que o problema é auto-adjunto, ou seja, a solução do problema adjunto (5.30) é igual à solução do problema de equilíbrio (5.22). Sendo $\mathbf{u} = \lambda$ pode reescrever-se a equação (5.26):

$$\frac{dc}{d\rho} = \frac{\delta c}{\delta \rho} + \mathbf{u}^T \left[\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \rho} - \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} \right] \quad (5.31)$$

Para o caso particular de não haver carregamento dependente de ρ , simplifica-se o resultado:

$$\frac{dc}{d\rho} = -\mathbf{u}^T \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta \rho} \mathbf{u} \quad (5.32)$$

Considerando que $\mathbf{K}(\rho) = \rho_e^p \mathbf{K}_e$ para o elemento finito e , vem:

$$\frac{dc}{d\rho_e} = -p\rho_e^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \quad (5.33)$$

A derivada da flexibilidade em relação à densidade de material ρ é negativa tal como seria de esperar pois ao aumentar a quantidade de material de uma estrutura, está-se a diminuir a sua flexibilidade, c .

A equação (5.33) pode ainda ser transformada em (ver Anexo A):

$$\frac{dc}{d\rho_e} = -p\rho_e^{p-1}\mathbf{E}^0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\partial\Omega \quad (5.34)$$

onde \mathbf{E}^0 é o tensor da elasticidade, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ é o tensor das deformações médias no elemento finito e e $\partial\Omega$ é o volume do elemento e . Este último resultado da derivada pode ser visto como a sensibilidade do problema equivalente de minimização da flexibilidade dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & c(\rho, \boldsymbol{\epsilon}(\rho)) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\rho) \boldsymbol{\epsilon}(\rho) \boldsymbol{\epsilon}(\rho) d\Omega \\ \text{s. a:} \quad & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = V_{\text{estrutura}}(\rho) \leq V_{\text{maximo}} \\ & \mathbf{E}(\rho) = \rho(x)^p \mathbf{E}^0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (5.35)$$

5.2.2. Função de Lagrange

Os problemas de optimização requerem a minimização ou maximização de uma função objectivo geralmente sujeitos a um determinado número de constrangimentos. Pode portanto escrever-se a formulação standard de um problema de optimização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a:} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{com } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde $f(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ são funções contínuas e diferenciáveis.

O problema constrangido (5.36) é transformado em um problema não constrangido através da função de Lagrange. Esta função é igual à função objectivo $f(\mathbf{x})$ somada com a multiplicação dos constrangimentos de desigualdade (≤ 0) por um determinado valor denominado de multiplicador de Lagrange ou variável dual [23]. A variável \mathbf{x} é costume chamá-la de variável primal. A função de Lagrange de (5.36) é então [23]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \Lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \Lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (5.37)$$

onde Λ_j é o multiplicador de Lagrange associado ao constrangimento $g_j(\mathbf{x})$ e deve ser sempre superior ou igual a zero. De facto, $\Lambda_j = 0$ quando o constrangimento j é satisfeito, é superior a zero quando o constrangimento está activo e é inferior a zero quando o constrangimento está inactivo. Assim sendo pode olhar-se para Λ_j como sendo um custo adicionado à função objectivo $f(\mathbf{x})$ que é necessário pagar para que o constrangimentos não seja violado [23].

O problema (5.36) passa então a ser formulado:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \Lambda) \quad (5.38)$$

O problema (5.38) tem como solução óptima \mathbf{x}^* se e só se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) forem satisfeitas. As condições KKT são [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(\mathbf{x}^*)}{\delta x_i} + \sum_{j=1}^m \Lambda_j^* \frac{\delta g_j(\mathbf{x}^*)}{\delta x_i} &= 0 \quad \forall i \\ g_j(\mathbf{x}^*) &\leq 0 \\ \Lambda_j^* &\geq 0 \\ \Lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (5.39)$$

No subcapítulo 5.2.4 estas condições serão aplicadas ao problema de optimização de topologia.

5.2.3. Algoritmo de solução dual

O método dual permite resolver um problema de otimização como o (5.36) fazendo com que a função de Lagrange dependa apenas do valor dos multiplicadores Λ (i.e a variável do problema passa a ser Λ). De acordo com a primeira condição de KKT:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \Lambda^*) = 0 \quad (5.40)$$

o que é o equivalente a dizer que \mathbf{x}^* é solução de:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \Lambda^*) \quad (5.41)$$

É então possível afirmar que para qualquer conjunto de multiplicadores de Lagrange $\Lambda_j \geq 0$ existe um \mathbf{x}^0 que resolve um problema igual a (5.38). Pode, portanto, considerar-se que \mathbf{x} é função de Λ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\Lambda) \quad (5.42)$$

Assim sendo é possível reescrever a função de Lagrange unicamente em função de Λ :

$$\ell(\Lambda) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\Lambda), \Lambda) = f(\mathbf{x}(\Lambda)) + \sum_{j=1}^m \Lambda_j g_j(\mathbf{x}(\Lambda)) \quad (5.43)$$

a $\ell(\Lambda)$ dá-se o nome de função dual [23]. O problema de otimização da função dual passa então a ser um problema de maximização e é chamado de problema dual [23]:

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda} \quad & \ell(\Lambda) \\ \text{s. a:} \quad & \Lambda_j \geq 0 \quad \text{com } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.44)$$

A solução de (5.44) é igual ao conjunto de multiplicadores de Lagrange ótimos Λ_j^* que satisfazem as condições de KKT. De acordo com [23] o problema dual possui as seguintes propriedades:

- Problema dual é um problema de maximização se o problema primal for de minimização.

- O problema dual tem solução se o primal também tiver.
- A solução do problema dual também é solução do problema primal.

Segundo [23] para qualquer \mathbf{x} e Λ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\geq \ell(\Lambda) \\ f(\mathbf{x}^*) &\geq \ell(\Lambda^*) \end{aligned} \tag{5.45}$$

o que significa que o problema dual é sempre o limite inferior do problema primal. Tal implica que em alguns casos a solução óptima do problema dual esteja fora do espaço de resultados admissíveis para o problema primal. No entanto no caso de problema primal ser convexo, existirá sempre um conjunto de pontos \mathbf{x}^* e Λ^* que satisfaz:

$$f(\mathbf{x}^*) = \ell(\Lambda^*) \tag{5.46}$$

tal implica que a solução do problema dual seja a mesma que a do problema primal.

Pode concluir-se que o método dual apenas justifica ser utilizado no caso do problema primal ser convexo e que existam mais variáveis \mathbf{x} que constrangimentos de forma a compensar o esforço extra para converter o problema primal para dual pela facilidade de resolução de um problema com menos variáveis. Este método de optimização é utilizado pelo método das asymptotas móveis (MMA) descrito no subcapítulo 5.2.6.

5.2.4. Condições de óptimo

Utilizando a formulação (5.35) é possível escrever a função de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\rho) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\rho) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\rho) d\Omega + \Lambda \left(\int_{\Omega} \rho d\Omega - V_{maximo} \right) + \int_{\Omega} \Lambda^+(x) (\rho(x) - 1) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \Lambda^-(x) (\rho_{min} - \rho(x)) d\Omega \end{aligned} \tag{5.47}$$

onde Λ é o multiplicador de Lagrange associado ao constrangimento de volume, $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ os multiplicadores de Lagrange associados aos valores que $\rho(x)$ pode tomar.

Diferenciando tudo em ordem a $\rho(x)$ e notando que a derivada do primeiro termo de (5.47) já foi calculado em (5.34):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{d\rho} = & -p\rho(x)^{p-1}\mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}(\rho) \bar{\mathbf{e}}(\rho)\delta\Omega + \Lambda\delta\Omega \\ & + \Lambda^+(x)\delta\Omega - \Lambda^-(x)\delta\Omega \end{aligned} \quad (5.48)$$

igualando (5.48) a zero de forma a obter o mínimo do problema e considerando apenas o caso no qual $\rho(x)$ toma valores entre $]0;1[$, i.e para densidades intermédias, de forma a tornar o constrangimento de valores de $\rho(x)$ inactivo e consequentemente $\Lambda^+(x) = \Lambda^-(x) = 0$:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho} = -p\rho(x)^{p-1}\mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}(\rho) \bar{\mathbf{e}}(\rho) + \Lambda = 0 \quad (5.49)$$

isolando Λ :

$$p\rho(x)^{p-1}\mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}(\rho) \bar{\mathbf{e}}(\rho) = \Lambda \quad (5.50)$$

Ao analisar (5.50) constata-se que o lado esquerdo da equação é muito semelhante à fórmula que permite calcular a densidade de energia de deformação de um corpo:

$$E_{deform} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}_e \bar{\mathbf{e}}_e \partial\Omega \quad (5.51)$$

onde $\bar{\mathbf{e}}_e$ é a extensão média no elemento e $\partial\Omega$ o volume desse elemento. Tendo em conta que o lado esquerdo de (5.50) é igual a Λ e a semelhança existente entre (5.50) e (5.51) é possível concluir que a situação de óptimo corresponde a uma espécie de uniformidade de densidade de energia de deformação estendida aos pontos do domínio onde a densidade assume valores intermédios entre 0 e 1.

5.2.5. Critério de optimalidade

Torna-se então possível desenvolver um algoritmo que começa por atribuir um determinado campo de densidades ao domínio de projecto Ω cuja única restrição é a de obedecer a $\int_{\Omega} \rho(x)d\Omega = \frac{V_{estrutura}}{\Omega}$ de forma a respeitar o constrangimento de volume (no Capítulo 7, subcapítulo 7.2 será estudada a influência que este campo de densidades inicial tem

no resultado final obtido). Uma vez atribuído este campo de densidades inicial, o algoritmo calcula, através da chamada de um código de elementos finitos, a energia de deformação da estrutura.

Em seguida o algoritmo diminui a flexibilidade da estrutura aumentando $\rho(x)$ dos elementos cuja energia de deformação é maior que Λ e reduzindo a densidade dos elementos com energia de deformação inferior a Λ .

É então efectuada uma nova análise de elementos finitos que recalcula a energia de deformação da estrutura. Este processo é repetido até que a variação do valor da flexibilidade seja inferior a uma dada percentagem; no caso de [13] o valor usado de origem é de 0.1%.

A forma como as densidades $\rho(x)$ são actualizadas é a seguinte [6]:

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \max\{(1 - \zeta)\rho_k, \rho_{\min}\} & \text{se } \rho_k B_k^\eta \leq \max\{(1 - \zeta)\rho_k, \rho_{\min}\} , \\ \min\{(1 + \zeta)\rho_k, 1\} & \text{se } \min\{(1 + \zeta)\rho_k, 1\} \leq \rho_k B_k^\eta , \\ \rho_k B_k^\eta & \text{se nenhum dos anteriores} . \end{cases} \quad (5.52)$$

em que B_K é dado por:

$$B_k = \Lambda_k^{-1} p \rho(x)^{p-1} \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_k(\rho) \boldsymbol{\varepsilon}_k(\rho) \quad (5.53)$$

onde o índice k indica o número da iteração que está a decorrer. Os valores dados habitualmente a ζ e η são 0.2 e 0.5 respectivamente e foram determinados de forma a proporcionarem uma convergência de resultados rápida e estável [6]. É importante referir que a igualdade de (5.50) apenas se aplica a densidades intermédias ou seja, $\rho(x) \in]0;1[$. Quando $\rho(x) = 0$ o valor da energia de deformação será menor que Λ e no caso $\rho(x) = 1$ o valor da energia de deformação será superior a Λ [6].

Como se pode ver em (5.52), este algoritmo utiliza um método heurístico para otimizar as densidades. Por fim há que referir que ρ_{K+1} é dependente do valor do multiplicador e Lagrange Λ o que implica que este tenha que ser ajustado de forma a que o conjunto de ρ_{K+1} não provoque uma violação do constrangimento de volume [6].

De acordo com [6] o algoritmo descrito já foi utilizado na optimização topológica de várias estruturas e tem como principal vantagem o facto de cada uma das densidades ser optimizada independentemente das outras até que seja necessário efectuar um reajustamento das

variáveis de projecto ρ de forma a confirmar que as densidades não ultrapassam o volume máximo pretendido [6]. Este reajustamento é feito através do uso do método da bissecção ou o método de Newton [6].

5.2.6. Método das asymptotas móveis (MMA)

O MMA é um método de programação matemática desenvolvido por Krister Svanberg [12] que permite resolver problemas de minimização constrangidos. Tal é feito aproximando o problema em análise a um sub-problema convexo e separável. Este último é resolvido através de um processo iterativo que actualiza o valor das variáveis com base na informação obtida na iteração actual e nas duas anteriores.

No caso genérico de uma função de n variáveis $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ a aproximação em torno do ponto \mathbf{x}^K é feita da seguinte forma [6]:

$$F(\mathbf{x})^k \approx F(\mathbf{x}^K) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i^k}{U_i^k - x_i} + \frac{s_i^k}{x_i - L_i^k} \right) \quad (5.54)$$

onde x_i é a variável i da função, K o número da iteração actual, U_i^K e L_i^K os limites das asymptotas que dão o nome ao método. Os parâmetros r_i^K e s_i^K são calculados da seguinte forma [6]:

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{dF}{dx_i}(x^k) > 0: \quad r_i^k &= (U_i^k - x_i^k)^2 \frac{dF}{dx_i}(x^k) \quad ; \quad s_i^k = 0 \\ \text{se } \frac{dF}{dx_i}(x^k) < 0: \quad r_i^k &= 0 \quad ; \quad s_i^k = -(x_i^k - L_i^k)^2 \frac{dF}{dx_i}(x^k) \end{aligned} \quad (5.55)$$

os limites U_i^k e L_i^k são determinados de acordo com [12]:

$$\begin{aligned}
& \text{se } k = 1 \text{ ou } k = 2: & \begin{cases} L_i^k = x_i^k - (x_{\max} - x_{\min}) \\ U_i^k = x_i^k + (x_{\max} - x_{\min}) \end{cases} \\
& \text{se } k \geq 3 \text{ e } (x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0: & \begin{cases} L_i^k = x_i^k - 0.7(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \\ U_i^k = x_i^k + 0.7(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) \end{cases} \quad (5.56) \\
& \text{se } k \geq 3 \text{ e } (x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) \geq 0: & \begin{cases} L_i^k = x_i^k - 1.2(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \\ U_i^k = x_i^k + 1.2(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) \end{cases}
\end{aligned}$$

em que x_{\min} e x_{\max} são os valores mínimos e máximos que cada variável x_i pode tomar. Como se pode ver por (5.56), o MMA utiliza um sistema heurístico para determinar se as assimptotas devem afastar-se ou aproximar-se de x_i^K em cada iteração. Caso o MMA detecte, por um lado, que os valores das variáveis de projecto estão a oscilar, i.e., $(x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0$, as assimptotas aproximam-se do ponto x_i^K . Por outro lado, se os valores das variáveis de projecto não estão a oscilar, i.e., $(x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) \geq 0$, então o MMA afasta as assimptotas de x_i^K de forma a acelerar a convergência.

Para o problema de minimização da flexibilidade, tendo em conta que a sensibilidade (5.34) é sempre negativa, obtém-se o sub-problema:

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho_e} \quad c(\rho^k, \mathbf{\epsilon}(\rho^k)) - \sum_{e=1}^N \left(\frac{(\rho_e^k - L_e^k)^2}{\rho_e - L_e^k} \right) \frac{dc}{d\rho_e}(\rho^k) \\
& \text{s. a:} \quad \sum_{e=1}^N \rho_e \partial \Omega_e \leq V_{\maximo} \quad (5.57)
\end{aligned}$$

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1$$

Escrevendo a função de Lagrange para o sub-problema e tratando o constrangimento $0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1$ à parte:

$$\mathcal{L} = c(\rho^k, \mathbf{\epsilon}(\rho^k)) - \sum_{e=1}^N \left(\frac{(\rho_e^k - L_e^k)^2}{\rho_e - L_e^k} \right) \frac{dc}{d\rho_e}(\rho^k) + \sum_{e=1}^N \Lambda \rho_e \delta \Omega_e \quad (5.58)$$

Uma vez que a função aproximadora é um somatório de funções, em que cada uma dessas funções depende apenas da variável ρ_e é possível tirar partido da separabilidade para dividir o sub-problema criado pelo MMA em N sub-problemas que são resolvidos separadamente. Obtém-se então:

$$\mathcal{L} = c(\rho^k, \mathbf{\epsilon}(\rho^k)) + \sum_{e=1}^N \mathcal{L}_e \quad (5.59)$$

Em que cada um dos N sub-problemas \mathcal{L}_e é igual a:

$$\mathcal{L}_e = - \left(\frac{(\rho_e^k - L_e^k)^2}{\rho_e - L_e^k} \right) \frac{dc}{d\rho_e}(\rho^k) + \Lambda \rho_e \delta \Omega_e \quad (5.60)$$

É possível comparar a solução calculada pelo MMA na resolução do sub-problema (5.60) com a obtida usando o método heurístico do critério de optimalidade (5.52) atribuindo a L_e^k o valor zero:

$$\mathcal{L}_e = - \left(\frac{\rho_e^{k^2}}{\rho_e} \right) \frac{dc}{d\rho_e}(\rho^k) + \Lambda \rho_e \delta \Omega_e \quad (5.61)$$

derivando (5.61) e igualando a zero obtém-se:

$$\frac{d\mathcal{L}_e}{d\rho_e} = - \left(\frac{\rho_e^{k^2}}{\rho_e^2} \right) p \rho^{k^{p-1}} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \delta \Omega_e + \Lambda \delta \Omega_e = 0 \quad (5.62)$$

resolvendo em relação a variável de projecto ρ_e :

$$\begin{aligned} \rho_e^2 &= \rho_e^{k^2} \Lambda^{-1} p \rho^{k^{p-1}} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \\ \rho_e &= \rho_e^k \left(\Lambda^{-1} p \rho^{k^{p-1}} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \bar{\mathbf{\epsilon}}(\rho) \right)^{0.5} \end{aligned} \quad (5.63)$$

tendo em conta que em (5.52) definiu-se $B_k = \Lambda_k^{-1} p \rho(x)^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{\epsilon}}_k(\rho) \bar{\mathbf{\epsilon}}_k(\rho)$ e notando que ρ_e é equivalente a ρ^{k+1} :

$$\rho^{k+1} = \rho^k B_k^{0.5} \quad (5.64)$$

este resultado é idêntico ao valor atribuído pelo critério de optimalidade (5.52) para densidades intermédias ($\rho_{min} \leq \rho \leq 1$) com $\eta=0.5$. Assim sendo o MMA, tal como o critério de optimalidade, optimiza o valor das densidades aumentando-a nos elementos com energia de deformação superior a Λ e diminuindo-a nos elementos com energia de deformação inferior ao valor do multiplicador de Lagrange. Em relação às densidades que violam o constrangimento $\rho_{min} \leq \rho \leq 1$ (tratadas à parte pelo MMA), estas são obtidas da mesma forma que o critério de optimalidade quando $\zeta=\infty$:

$$se \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 : \rho_e = \rho_e$$

$$se \rho_e > 1 : \rho_e = 1 \quad (5.65)$$

$$se \rho_e < \rho_{min} : \rho_e = \rho_{min}$$

A utilização de valores diferentes de zero para o limite inferior da asymptota (L_e^k) permite ao MMA acelerar a velocidade de convergência do problema [6] sem acrescer o custo computacional da análise sendo por isso uma ferramenta importante para a optimização de topologia de estruturas.

Ao olhar para (5.57), constata-se que existem N variáveis de projecto para apenas um constrangimento (mais uma vez, tratando $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$ à parte). Tendo em conta que o sub-problema criado pelo MMA é sempre convexo, é possível recorrer ao método dual descrito no subcapítulo 5.2.3 para resolvê-lo. Desta forma, a solução do problema inicial (5.35) é encontrada resolvendo-se um conjunto de N sub-problemas de uma única variável separadamente reduzindo assim o esforço computacional necessário [6].

5.3. Filtro das sensibilidades

Ao resolver os problemas (5.12), (5.17), (5.18), (5.19) e (5.35) computacionalmente, podem surgir dois tipos de problemas.

O primeiro problema deve-se ao facto de os resultados obtidos serem dependentes da malha que discretiza o domínio de projecto Ω . Isto acontece porque para um mesmo constrangimento de volume, uma malha mais refinada permite ao algoritmo otimizar a densidade de um maior número de elementos para a mesma porção de Ω . Caso a malha se torne demasiado refinada, começam a surgir um elevado número de tiras finas de material [6]. Tal resultado não tem, na prática, qualquer utilidade à escala macroscópica. Na Figura 5.5 apresenta-se um exemplo no qual para as mesmas condições de fronteira, se discretizou um domínio de projecto com malhas cada vez mais refinadas [6]:

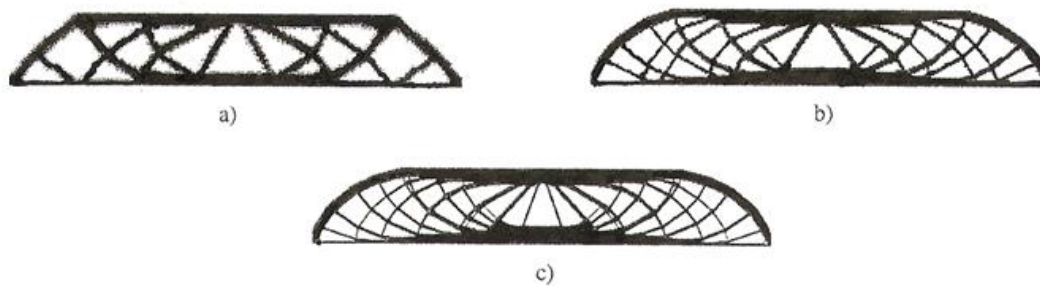


Figura 5.5: Exemplo do aparecimento de microestruturas devidas a um refinamento excessivo da malha:

a) 2700 elementos, b) 4800 elementos, c) 17200 elementos. [6]

O segundo problema que pode ocorrer é o chamado *checkerboard* ou tabuleiro de xadrez se traduzido à letra, que é caracterizado pelo aparecimento de zonas compostas por *pixels* pretos e brancos. O aparecimento do *checkerboard* deve-se ao facto dos elementos finitos utilizarem funções de forma de baixo grau (lineares) [6]. Na Figura 5.6 apresenta-se um domínio de projecto com as respectivas condições de fronteira que após a optimização produziu um resultado com *checkerboard*.

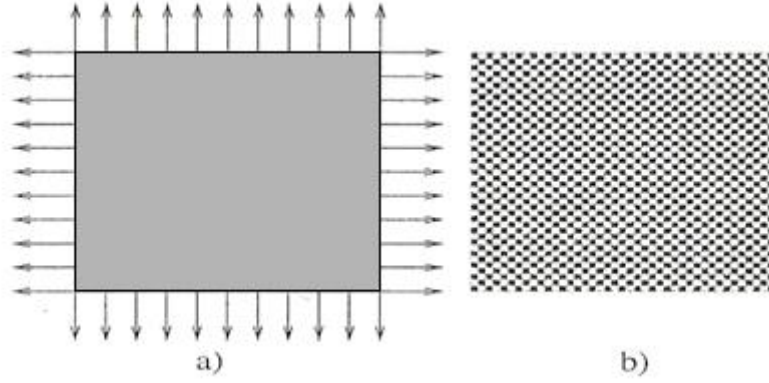


Figura 5.6: Exemplo do problema do *checkerboard*:

a) domínio de projecto, b) resultado[6]

Uma forma de resolver ambos os problemas é recorrer à filtragem das sensibilidades. Isto é feito fazendo a média da sensibilidade de um determinado elemento e com a dos elementos que o rodeiam [6]:

$$\frac{\widehat{dc}}{d\rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{dc}{d\rho_i} \quad (5.66)$$

em que N representa o número total de elementos. O operador de convulsão \widehat{H}_i é calculado segundo [6]:

$$\widehat{H}_i = r_{min} - dist(e, i), \quad \{ i \in N \mid dist(e, i) \leq r_{min} \}, \quad e = 1, \dots, N \quad (5.67)$$

onde $dist(e, i)$ representa a distância entre o centro do elemento e a ser filtrado e o centro do elemento i e r_{min} é o raio que determina quais os elementos que vão entrar no cálculo. Na Figura 5.7 apresenta-se o mesmo domínio de projecto e condições de fronteira que na Figura 5.6 mas desta vez com filtragem das sensibilidades [6]:

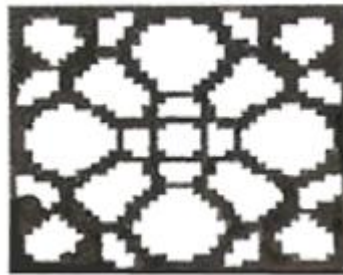


Figura 5.7: Efeito do filtro de sensibilidades sobre o *checkerboard*: [6]

Na Figura 5.8 apresenta-se o efeito de independência da malha provocado pelo filtro de sensibilidades na optimização de uma viga em consola. Estes resultados foram obtidos correndo o código de 99 linhas escrito em Matlab por O.Sigmund alterado para resolver o problema em questão.

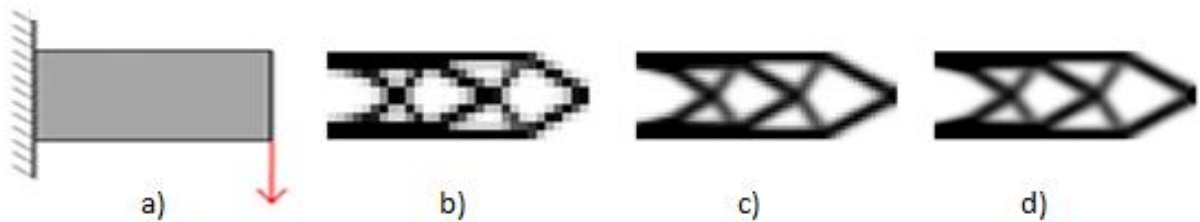


Figura 5.8: Efeito do filtro de sensibilidades sobre a dependência da malha:

- a) domínio de projecto e condições de fronteira , discretizado por b) 300 elementos,
c) 1200 elementos, d) 10800 elementos

Segundo [6], este método não implica um aumento considerável do custo computacional do problema sendo no entanto muito eficaz a eliminar o aparecimento do *checkerboard* e a dependência da malha dos problemas.

O filtro das sensibilidades já foi utilizado em problemas 2D e 3D com um elevado número de constrangimentos (até 20) com resultados positivos revelando-se uma ferramenta extremamente útil para a concepção de estruturas macroscópicas [6],

Capítulo 6

Optimização de topologia de perfis com secção transversal uniforme

A optimização de uma guarda de segurança com a parametrização descrita no Capítulo 5 produziria perfis que apesar de mais rígidos que o actual, seriam de difícil construção pois a sua secção transversal não seria constante ao longo do comprimento.

Neste capítulo vai ser descrito a parametrização usada para que a solução obtida possua uma secção transversal uniforme ao longo do comprimento assim como as modificações a efectuar na formulação do problema de optimização de topologia. Essas modificações são válidas para as formulações (5.12), (5.17), (5.18), (5.19) e (5.35) e vão ser explicadas em detalhe para (5.35).

6.1. Método

Uma vez que se pretende optimizar uma guarda de segurança de secção transversal uniforme com as forças descritas na Tabela 4.2, é necessário considerar um domínio de projecto tridimensional. Tendo em conta que será a secção transversal que irá determinar a forma da

barreira, é conveniente discretizar o domínio de projecto com maior detalhe no plano YZ do que na direcção longitudinal X (i.e. um maior número de elementos nas direcções Y e Z que em X).

Esta forma de discretizar o domínio de projecto permite reduzir o número total de elementos, sem perda de detalhe na topologia da secção transversal, diminuindo assim o custo computacional da optimização. Na Figura 6.1 apresenta-se um domínio de projecto de dimensões $10\text{m} \times 2\text{m} \times 2\text{m}$ discretizado por 20 elementos em X , 40 elementos em Y e 40 elementos em Z .

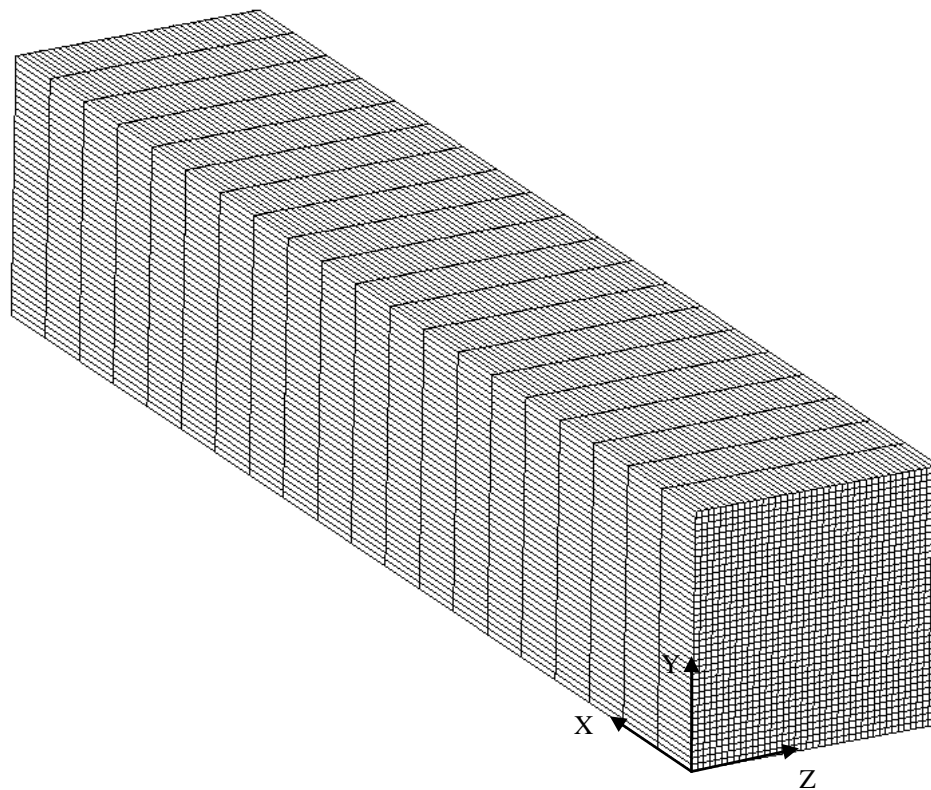


Figura 6.1: Domínio de projecto discretizado por $20 \times 40 \times 40$ elementos

De forma a produzir um resultado com secção transversal uniforme é necessário agrupar os elementos em tiras ao longo da direcção X e atribuir a cada tira uma densidade ρ . Isto faz com que cada uma das 40×40 tiras (número de elementos em $Y \times$ número de elementos em Z) tenha uma variável de *design* associada. Assim sendo durante o processo de optimização o algoritmo vai determinar se existe ou não material em cada uma das tiras. Na Figura 6.2 destaca-se uma tira de 20 elementos para o domínio de projecto apresentado na Figura 6.1.

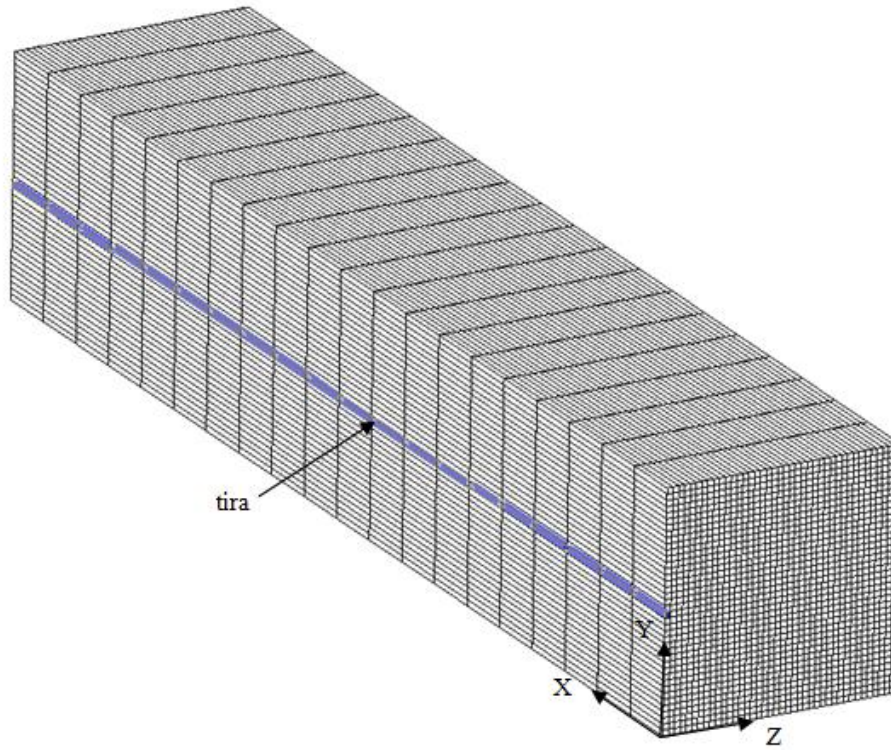


Figura 6.2: Tira de 20 elementos ao longo de X com densidade ρ

O vector de densidades \mathbf{p} passa então a ser um vector de dimensão 40×40 em vez de $20 \times 40 \times 40$. Há que referir que cada uma das 1600 tiras terá a sua própria densidade e que os 20 elementos de uma tira terão a mesma densidade.

6.2. Formulação do problema

De forma a obter uma solução com secção transversal uniforme é conveniente utilizar a formulação (5.35) na forma discretizada e proceder a algumas alterações conforme são explicadas nesta secção. A discretização do domínio de projecto por uma malha de elementos finitos regular considerando a densidade e o campo de deformação constantes em cada elemento permite escrever (5.35) na forma:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad c(\rho, \epsilon(\rho)) &= \sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}(\rho_e) \bar{\epsilon}(\rho_e) \partial\Omega_e \\ \text{s. a:} \quad \sum_{e=1}^N \rho_e \partial\Omega_e &\leq V_{\text{maximo}} \\ 0 < \rho_{\min} &\leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que N representa o número de elementos que discretizam o domínio de projecto Ω , $\partial\Omega_e$ o volume de cada elemento e $\bar{\epsilon}$ o tensor das extensões constante no elemento, obtido fazendo a média nos pontos de Gauss do elemento. Tendo em conta apenas as variáveis explícitas da flexibilidade e considerando $\bar{\epsilon}_i$ como sendo o tensor das deformações médias do elemento i pode escrever-se que (6.1) é equivalente a:

$$c(\rho, \epsilon) = \rho_1^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}(\rho_1) \bar{\epsilon}(\rho_1) \partial\Omega_1 + \rho_2^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}(\rho_2) \bar{\epsilon}(\rho_2) \partial\Omega_2 + \dots + \rho_N^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}(\rho_N) \bar{\epsilon}(\rho_N) \partial\Omega_N \quad (6.2)$$

É então possível adaptar (6.2) para que exista apenas uma densidade ρ_j para todos os elementos de uma tira j . Considerando o domínio de projecto da Figura 6.2 e respectivo sistema de eixos, é possível numerar os elementos segundo X em primeiro, Y em segundo e Z em terceiro a partir da origem do referencial:

$$c(\rho, \epsilon) = \rho_1^p (\mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_1 \partial\Omega_1 + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_2 \bar{\epsilon}_2 \partial\Omega_2 + \dots + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{20} \bar{\epsilon}_{20} \partial\Omega_{20}) + \rho_2^p (\mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{21} \bar{\epsilon}_{21} \partial\Omega_{21} + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{22} \partial\Omega_{22} + \dots + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{40} \bar{\epsilon}_{40} \partial\Omega_{40}) + \dots + \rho_{1600}^p (\mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{31981} \bar{\epsilon}_{31981} \partial\Omega_{31981} + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{31982} \bar{\epsilon}_{31982} \partial\Omega_{31982} + \dots + \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_{32000} \bar{\epsilon}_{32000} \partial\Omega_{32000}) \quad (6.3)$$

É possível escrever a função objectivo da flexibilidade por tiras da seguinte forma:

$$c(\rho, \epsilon) = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_j \partial\Omega_j \quad (6.4)$$

onde NT representa o número total de tiras (i.e, o número de elementos em Y multiplicado pelo número de elementos em Z) e NET o número de elementos por tira (ou seja o número de elementos segundo X).

Seguindo um raciocínio idêntico é possível concluir que o constrangimento de volume passa a ser:

$$\sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i \partial\Omega_j \leq V_{maximo} \quad (6.5)$$

O problema de minimização da flexibilidade para perfis com secção transversal constante é então:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & c(\rho, \epsilon) = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_j \partial \Omega_j \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i \partial \Omega_j \leq V_{maximo} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1$$

Uma vez que esta formulação do problema destina-se a ser resolvida através do método de programação matemática MMA, é necessário definir qual a sua sensibilidade para cada tira de elementos:

$$\frac{dc(\rho, \epsilon)}{d\rho} = \sum_{j=1}^{NET} -p\rho_i^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_j \partial \Omega_j \quad (6.7)$$

Considerando o constrangimento $0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1$ à parte, obtém-se a função de Lagrange para este problema:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_j \partial \Omega_j + \Lambda \left(\sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i \partial \Omega_j - V_{maximo} \right) \quad (6.8)$$

e a sua derivada em ordem a ρ_i (considerando (6.7)):

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho} = \sum_{j=1}^{NET} -p\rho_i^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_j \partial \Omega_j + \Lambda \sum_{j=1}^{NET} \partial \Omega_j \quad (6.9)$$

igualando a derivada da função de Lagrange a zero e tirando partido da separabilidade do problema obtém-se que para uma tira i :

$$\sum_{j=1}^{NET} -p\rho_i^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_j \partial\Omega_j + \Lambda \sum_{j=1}^{NET} \partial\Omega_j = 0$$

$$\partial\Omega \sum_{j=1}^{NET} p\rho_i^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_j = \Lambda \partial\Omega \times NET \quad (6.10)$$

$$\sum_{j=1}^{NET} p\rho_i^{p-1} \mathbf{E}^0 \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_j = \Lambda \times NET$$

O termo mais à esquerda da última equação de (6.10) é constante para densidades intermédias e igual a multiplicação de Λ pelo número de elementos de cada tira. Assim sendo é possível constar que a ultima equação de (6.10) é muito semelhante à energia de deformação (5.51) o que significa que na solução óptima, as tiras com densidades intermédias vão possuir a mesma densidade de energia de deformação. Tendo em conta o que foi explicado no Capítulo 5 subcapítulo 5.2.5 e 5.2.6 sobre a forma como o critério de optimalidade e o MMA optimizam o valor das densidades, conclui-se que o código de optimização vai aumentar a densidade das tiras que possuem energia de deformação superior a $\Lambda \times NET$ e reduzir a densidade das tiras com energia inferior a $\Lambda \times NET$.

Tendo em atenção tudo o que foi dito a cima, modificou-se um código de optimização topológica destinado à minimização da flexibilidade escrito em FORTRAN77 para que este resolvesse o problema (6.6). A análise de elementos finitos de cada iteração é feita pela chamada do programa ANSYS e as densidades são actualizadas com o uso do MMA. Este código apenas permite a optimização de domínios de projecto prismáticos cujas tiras são definidas segundo o eixo XX da interface de visualização gráfica do ANSYS.

Uma pequena nota para a forma como o tensor de rigidez \mathbf{E}^0 (ou E_{ijkl}^0 na notação de Einstein) é calculado:

$$E_{ijkl}^0 = \ell_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \ell_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.11)$$

em que ℓ_1 (também conhecido como módulo de elasticidade transversal G) e ℓ_2 são as constantes de Lamé e δ é o delta de Kronecker.

As constantes de Lamé são calculadas através do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν do material da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \ell_2 &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\tag{6.12}$$

Por fim há que referir que o filtro das sensibilidades passa a ser calculado por tira em vez de ser por elemento. Assim sendo as sensibilidades filtradas são dadas por:

$$\frac{\widehat{dc}}{d\rho_t} = \frac{1}{\rho_t \sum_{i=1}^{NT} \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^{NT} \widehat{H}_i \rho_i \frac{dc}{d\rho_i}\tag{6.13}$$

em que ρ_t é a densidade da tira t e NT representa o número total de tiras. O operador de convulsão \widehat{H}_i é calculado segundo [6]:

$$\widehat{H}_i = r_{min} - dist(t, i), \quad \{i \in N \mid dist(t, i) \leq r_{min}\}, \quad t = 1, \dots, NT\tag{6.14}$$

onde $dist(t, i)$ representa a distância entre o centro da tira t a ser filtrada e o centro da tira i e r_{min} é o raio de filtragem para a tira t .

6.3. Formulação multicarga

Uma vez definido o problema (6.6), é possível adaptar o mesmo à formulação multicarga do problema (5.18) com M casos de carga em que cada tem um peso w^k :

$$\begin{aligned}\min_{\rho} \quad & c(\rho, \epsilon) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} w^k \rho_i^p \mathbf{E}^0 \bar{\epsilon}_j^k \bar{\epsilon}_j^k \partial \Omega_j, \text{ com } \sum_{k=1}^M w^k = 1 \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NET} \rho_i \partial \Omega_j \leq V_{maximo}\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1$$

Uma pequena nota apenas para referir que $\bar{\epsilon}_j^k$ representa o tensor das extensões médias do elemento j no caso de carga k .

6.4. Algoritmo

O algoritmo utilizado nesta dissertação foi programado em FORTRAN77 e utiliza uma chamada ao programa comercial ANSYS v11.0 que efectua em modo *batch* a análise de elementos finitos do perfil a cada iteração. Este método permite diminuir o custo computacional da análise pois evita todo o processamento necessário associado à utilização da interface gráfica do ANSYS.

Uma vez que se pretende que o resultado da optimização seja um perfil de secção transversal constante ao longo do domínio isso significa que todos os elementos de uma tira vão possuir a mesma densidade. Tal como foi descrito no subcapítulo (6.1) isto significa que o número de densidades a optimizar é apenas dependente da quantidade de elementos que discretizam a secção transversal do domínio de projecto. No entanto para a optimização das mesmas é necessário efectuar uma análise de elementos finitos a cada iteração. Isto implica que o algoritmo deve conseguir associar a distribuição de densidades da secção transversal a todos os elementos que compõem uma tira. Tal foi conseguido tirando partido do facto do ANSYS numerar sequencialmente os elementos segundo o eixo X em primeiro, Y em segundo e Z em terceiro lugar. Definiu-se então que cada tira é composta pelo agrupamento dos elementos segundo a direcção XX do referencial das Figuras 6.1 e 6.2. Isto permite que cada elemento de uma tira esteja associado a um número conhecido. Tal possibilitou a programação de um conjunto de instruções que fazem com que o algoritmo associe cada uma das densidades da secção transversal a todos os elementos que compõem a tira.

Após concluída a análise, é pedido ao ANSYS que este calcule a soma da energia de deformação de todos os elementos do domínio de projecto e que guarde num ficheiro as extensões de cada elemento calculadas através da média das extensões medidas nos pontos de Gauss do elemento. Ao contrário da flexibilidade, o cálculo das sensibilidades não pode ser efectuado pelo ANSYS. Assim sendo, foi programada a equação (6.7) no código em FORTRAN para que este lê-se o ficheiro das deformações gravado pelo ANSYS e calculasse a sensibilidade de cada tira.

Os gradientes são então filtrados em função do raio que permite que se efectue a média do gradiente do elemento filtrado com os gradientes dos elementos que se encontram na vizinhança (ver equação 6.13). As sensibilidades são então usadas pelo MMA de forma a optimizarem o valor da flexibilidade. Em seguida apresenta-se um fluxograma onde se ilustra o funcionamento do algoritmo usado nesta dissertação (Figura 6.3):

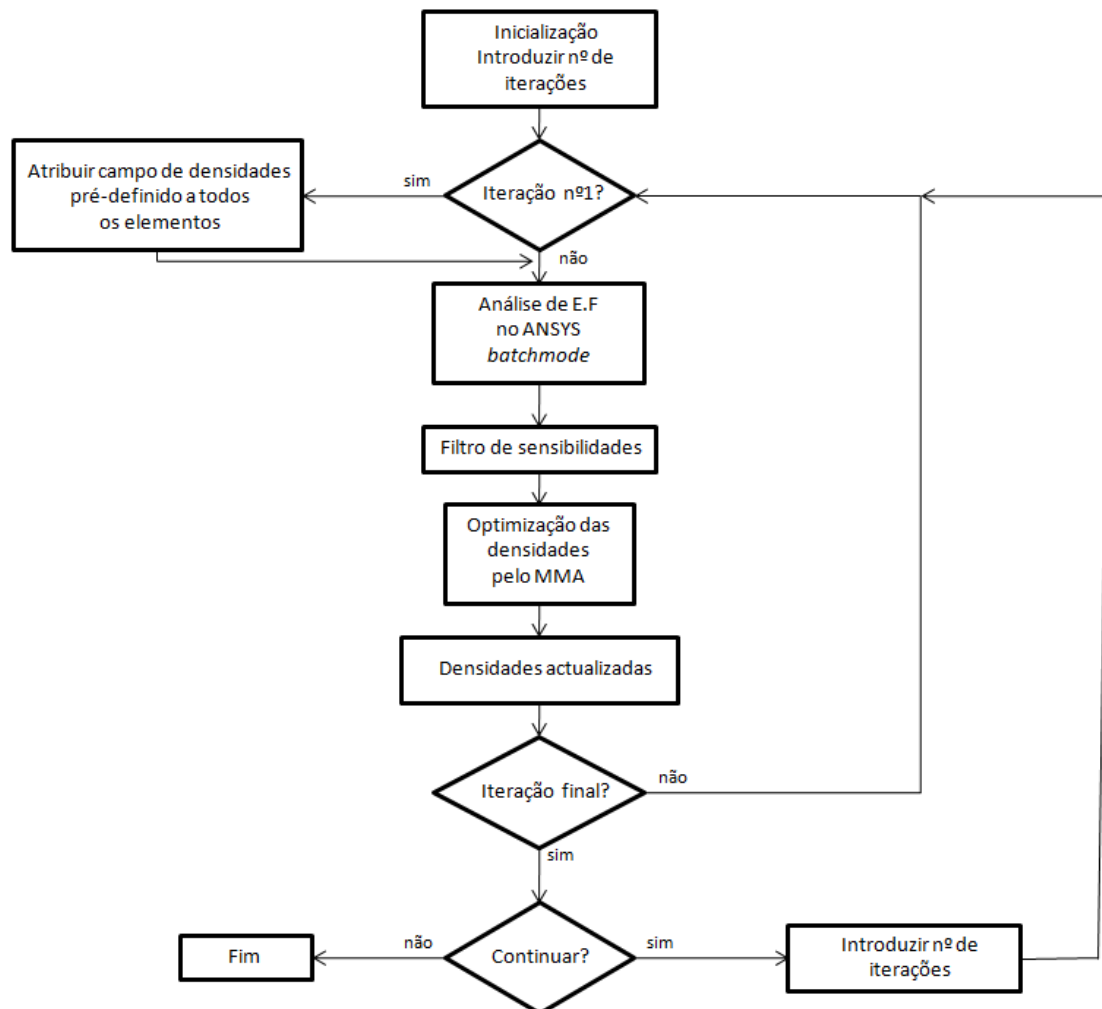


Figura 6.3: Fluxograma do algoritmo que utiliza o MMA

Capítulo 7

Perfis de secção transversal uniforme – Estudos de caso

Neste capítulo vão ser descritos diversos testes efectuados ao código de optimização em FORTRAN77 descrito no Capítulo 6 subcapítulo 6.3. Para o correcto funcionamento do código deve-se considerar que as tiras de elementos estão direccionadas segundo o eixo XX (ver Figura 6.2). A optimização de topologia encontrará soluções de secção transversal para perfis cuja secção se pretende constante ao longo do comprimento.

Em primeiro lugar vão ser efectuados testes considerando uma distribuição inicial de densidades uniforme igual à fracção volúmica alvo para todos os elementos. Em seguida, será testada a influência que diferentes distribuições iniciais de densidades têm sobre o resultado final obtido. Por fim, será testado o efeito de elementos de não *design* na solução final.

7.1. Distribuição de densidade inicial uniforme

Neste subcapítulo foram estudados três casos que permitiram perceber se o código de optimização topológica estava a funcionar correctamente. Estes três casos consistiram na optimização do domínio de projecto apresentado na Figura 6.1 atribuindo-lhe diferentes condições de fronteira que originassem distribuições de material de fácil interpretação. Em todos os testes efectuados, considerou-se o encastramento do domínio de projecto. O material

utilizado foi um aço com módulo de Young de 200GPa e um coeficiente de Poisson de 0.3 e a distribuição de densidades na primeira iteração foi igual à fracção volúmica $\frac{V_{estrutura}}{V_{\Omega}} \times 100 = 50\%$, utilizou-se um expoente de penalização (SIMP) $p=4$, e um raio do filtro inicial igual a 2.5 (sendo este reduzido para 1.5 ao longo das iterações).

7.1.1. Viga em consola com carga concentrada

O primeiro caso consiste em otimizar uma viga em consola com uma carga de 100 kN aplicada no nó central da face mais distante do encastramento, como ilustra a Figura 7.1 :

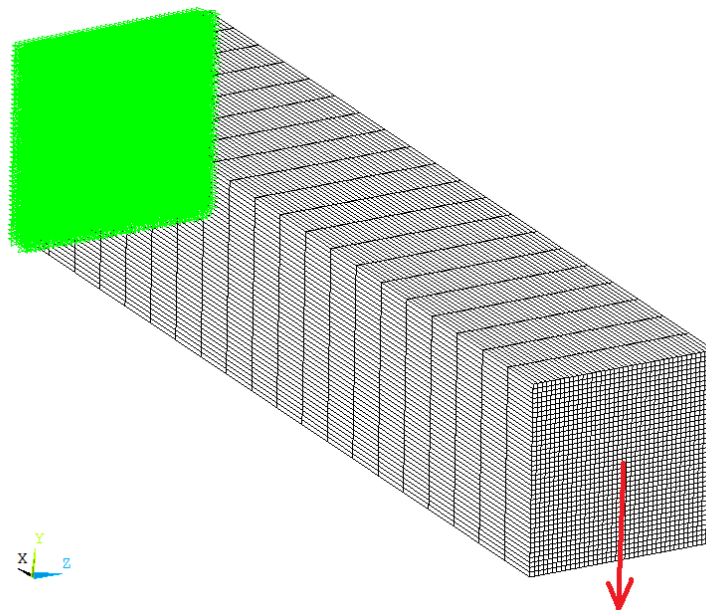


Figura 7.1: Vista em perspectiva da viga em consola com carga concentrada

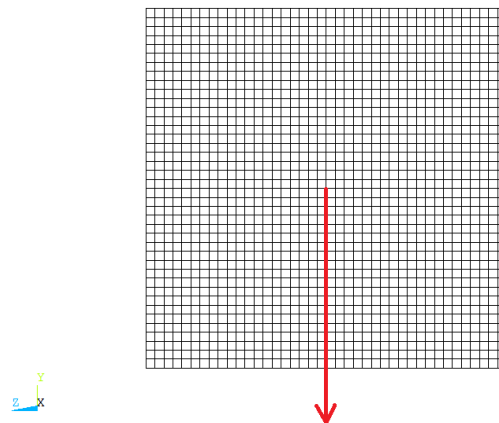


Figura 7.2: Vista frontal da viga em consola com carga concentrada

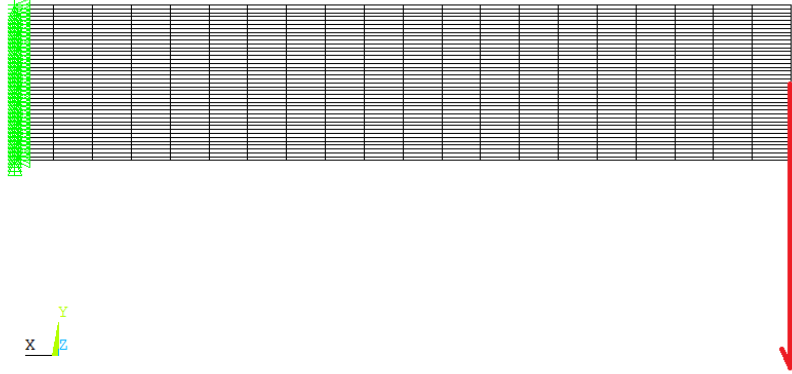


Figura 7.3: Alçado esquerdo da viga em consola com carga concentrada

Tendo em conta o carregamento aplicado é possível prever fisicamente os locais onde a optimização de topologia deverá colocar material para que o perfil final seja o mais rígido possível. Para isso começa-se por escrever a fórmula da flecha máxima para uma viga em consola com uma carga aplicada na extremidade [21]:

$$\delta = \frac{FL^3}{3E^0I} \quad (7.1)$$

em que F é a carga aplicada, L é o comprimento da viga, E^0 o modulo de Young e I o momento de inércia da secção transversal. Reorganizando (7.1) de forma a dar ênfase ao termo que representa a rigidez da viga obtém-se uma equação do mesmo tipo que a lei de Hooke (5.14):

$$F = \frac{3E^0I}{L^3} \delta \quad (7.2)$$

em que $\frac{3E^0I}{L^3}$ é o termo responsável pela rigidez da viga. Pretende-se a maximização deste termo.

Uma vez que L e E^0 são constantes, o único termo variável é o momento de inércia I . Atendendo à definição de I e considerando o sistema de eixos das Figuras 7.1 a 7.3 tem-se:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (7.3)$$

em que y é a cota segundo o eixo YY entre um elemento que discretiza a secção transversal de área A e o eixo horizontal ZZ . Uma vez que para maximizar $\frac{3E^0I}{L^3}$ é necessário maximizar I_z , conclui-se que o algoritmo deverá colocar material nos locais mais afastados da linha neutra. Para o caso da viga em consola das Figuras 7.1 a 7.3, a linha neutra passa pelo ponto de aplicação da carga e é coincidente com o eixo ZZ . A distribuição de tensões normais neste problema reforça a ideia de que é necessário colocar material nas zonas mais afastadas da linha neutra já que é nessas zonas que a tensão é maior (Figura 7.4)

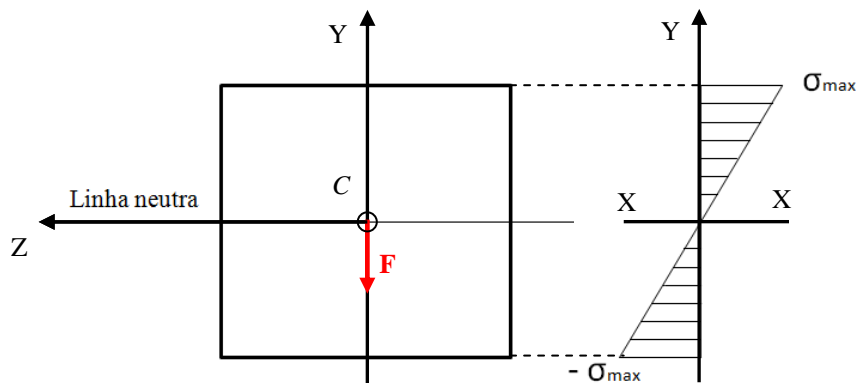


Figura 7.4: Distribuição de tensões normais na secção transversal da viga

Quanto às tensões de corte provocadas pelo carregamento em causa, estas possuem uma distribuição parabólica em que o valor máximo é obtido na intersecção da parábola com a linha neutra (Figura 7.5).

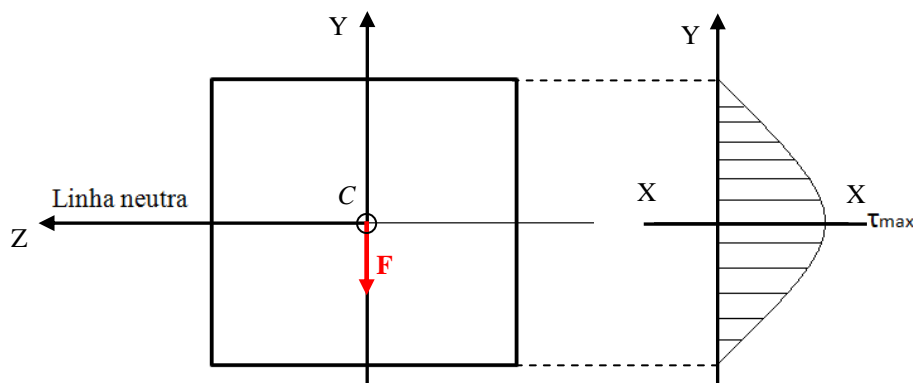


Figura 7.5: Distribuição de tensões tangenciais na secção transversal da viga

Tendo em conta tudo o que foi dito, e considerando o efeito de concentração de tensões no centro da área da secção transversal do perfil devido à colocação da carga, é esperado que o programa coloque material nos elementos com a cota ZZ mais afastada da linha neutra (devido

às tensões normais) assim como ao longo de uma recta paralela ao eixo YY que passa pelo ponto de aplicação da carga. O resultado previsto é o de uma viga em I.

O resultado obtido foi um perfil em I com flexibilidade (*compliance*) de 8.85 J. Na Figura 7.6 é possível visualizar a distribuição de densidades na secção transversal do domínio de projecto através de uma escala de cinzentos que atribui cores escuras a elementos com densidades elevadas e claras a elementos com densidades baixas, sendo que as densidades extremas são brancas ($\rho=0.01$) e pretas ($\rho=1$). O motivo pelo qual a densidade mínima é igual a 0.01 é evitar que a matriz de rigidez do problema fique singular.

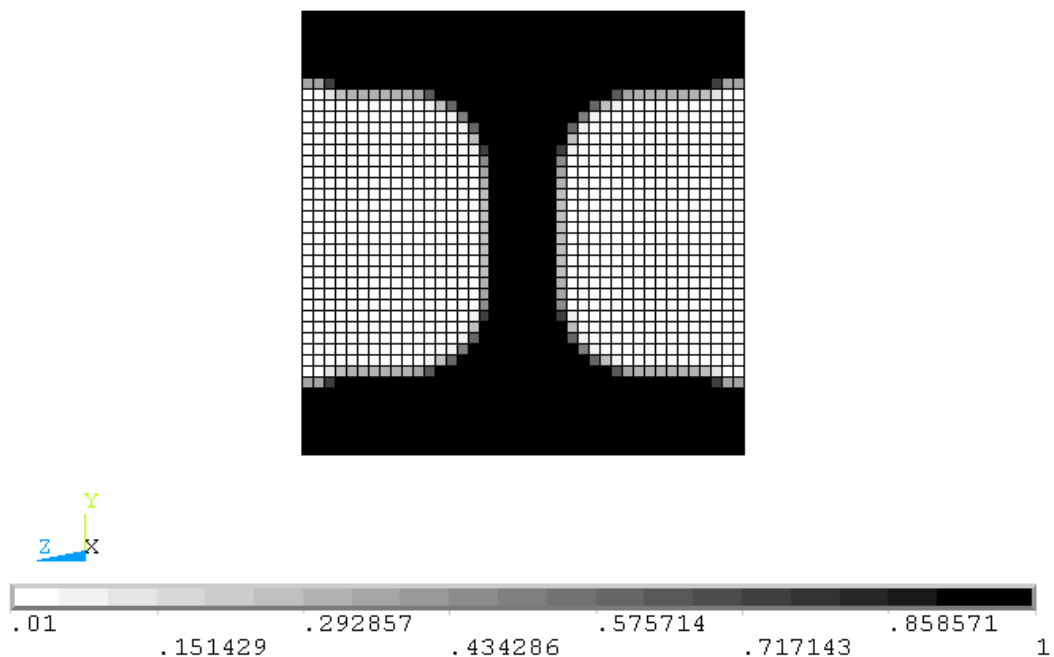


Figura 7.6: Distribuição de densidades na secção transversal da viga em consola com carga concentrada.

Na Figura 7.7 é mostrada uma vista em perspectiva dos elementos com densidade entre 0.9 e 1:

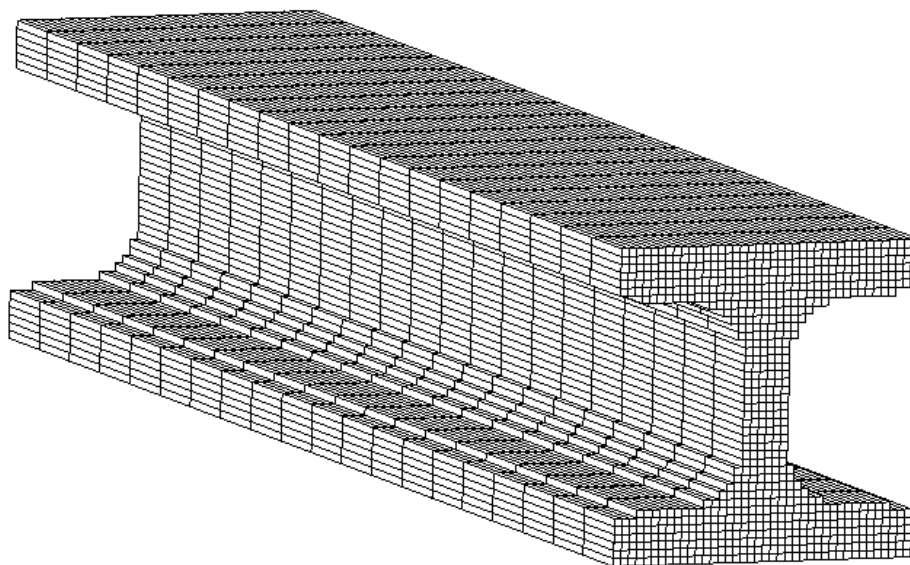


Figura 7.7: Vista de perfil dos elementos com densidades superiores a 0.9

O histórico de convergência é apresentado nas Figuras 7.8 e 7.9:



Figura 7.8: Percentagem de violação do constrangimento ao longo das iterações.

Analisando a Figura 7.8 constata-se que o algoritmo está a funcionar correctamente já que o constrangimento de volume nunca é violado pois a percentagem de violação é sempre negativa. Isto deve-se ao facto de o MMA utilizar variáveis auxiliares nas aproximações dos

sub-problemas de modo que os constrangimentos do problema nunca são violados. As soluções do MMA são sempre admissíveis.



Figura 7.9: Variação da *compliance* ao longo das iterações.

De acordo com a Figura 7.9 a *compliance* passou de 405.66 J na primeira iteração para 8.85 J na última. Como se pode ver, a Figura 7.9 é s decrescente o que indica mais uma vez o correcto funcionamento do algoritmo (minimização da flexibilidade). Uma vez que o algoritmo utiliza o MMA que se baseia em informações sobre as sensibilidades (gradientes) para otimizar a flexibilidade, é de esperar que o valor da função objectivo seja tendencialmente decrescente até ser atingido um mínimo local onde estarão satisfeitas as condições de optimalidade.

7.1.2. Viga em consola sujeita a um momento torsor

Neste segundo estudo de caso a única alteração em relação ao primeiro foi o carregamento aplicado. Em vez de se considerar um carregamento aplicado no centro da face mais distante do encastramento, utilizaram-se duas forças de 10000 kN cada que provocam um momento torsor ao longo do eixo XX do domínio de projecto (ver Figura 7.10)

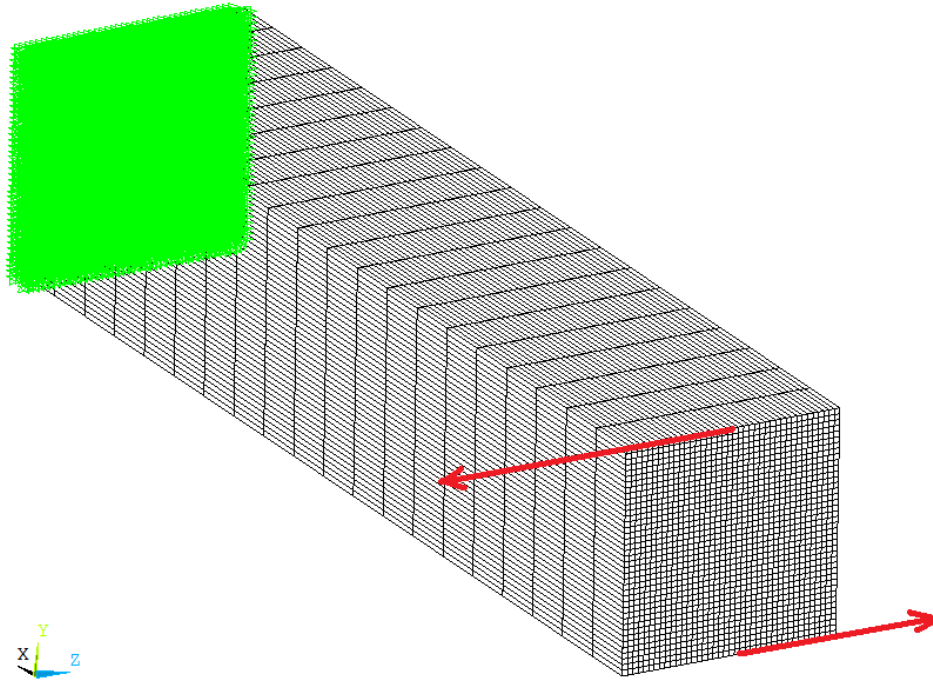


Figura 7.10: Condições de fronteira do segundo caso ao longo das iterações.

Este carregamento também permite prever fisicamente os locais onde o algoritmo deverá colocar material de forma a tornar o perfil o mais rígido possível. Para isso começa-se por escrever a fórmula do ângulo de torção ϕ para uma viga em consola sujeita a um momento torsor T [21]:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (7.4)$$

onde L é o comprimento da viga, J é o momento polar de inércia e G é o módulo de elasticidade transversal. Reorganizando (7.4):

$$T = \frac{JG}{L} \phi \quad (7.5)$$

em que $\frac{JG}{L}$ é o termo responsável pela rigidez da viga.

Efectuando um raciocínio semelhante ao do caso 1, conclui-se que para maximizar a rigidez é necessário maximizar J . Uma vez que J é calculado por:

$$J = \int_A r^2 dA \quad (7.6)$$

onde r é a distancia entre o centroide e qualquer elemento que discretiza a secção transversal do domínio de projecto da Figura 7.10. Tendo em conta (7.6) conclui-se que para maximizar J , deve-se colocar material nos locais mais afastados do centro da secção transversal do perfil segundo o raio r .

Como se pode ver pelas Figuras 7.11 e 7.12 o perfil optimizado é realmente uma viga tubular de flexibilidade 25562.80 J:

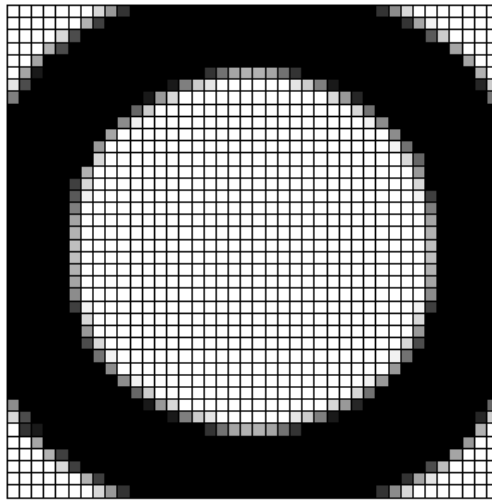


Figura 7.11: Distribuição de densidades na secção transversal

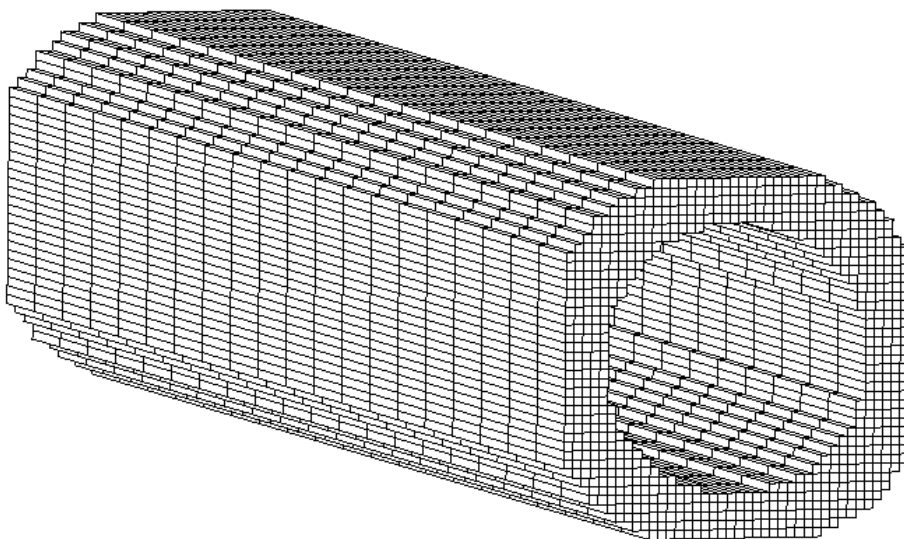


Figura 7.12: Vista em perspectiva dos elementos com densidades superiores a 0.9

Ao analisar o perfil obtido constata-se que este não é perfeitamente tubular pois ele é achatado na vizinhança do local onde as forças foram aplicadas. Isto deve-se ao facto de as forças aplicadas estarem a causar um efeito de concentração de tensões nos nós de aplicação. Assim sendo, o algoritmo coloca mais material nestes locais pois a energia de deformação dos mesmos é elevada.

O histórico de convergência é apresentado nas Figuras 7.13 e 7.14:



Figura 7.13: Percentagem de violação do constrangimento ao longo das iterações.

Analisando a Figura 7.13 é possível verificar que apesar de algumas oscilações durante a optimização o constrangimento de volume nunca é violado o que indica mais uma vez que o algoritmo funcionou correctamente.

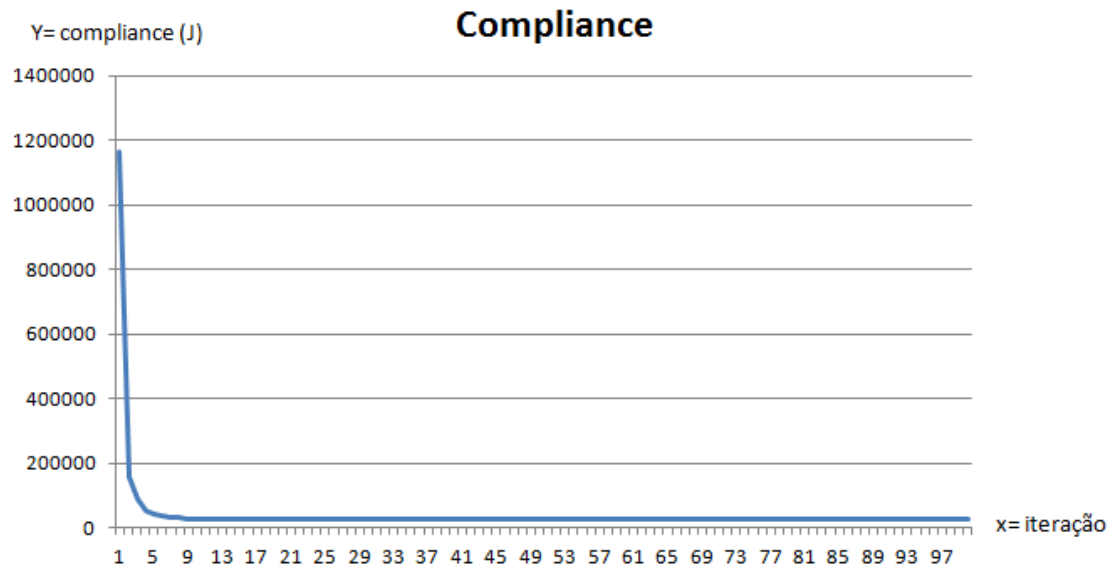


Figura 7.14: Variação da *compliance* ao longo das iterações.

De acordo com a Figura 7.14 a *compliance* passou de 1166300 J na primeira iteração para 25562 J na última. Os valores da flexibilidade são sempre decrescentes o que indica que o algoritmo funcionou correctamente.

7.1.3. Viga em consola com carga distribuída

Para o último caso estudado nesta parte da dissertação, considerou-se mais uma vez uma viga em consola mas desta vez com uma pressão de 861 kN/m^2 distribuída uniformemente sobre a mesma (Figura 7.15 e 7.17).

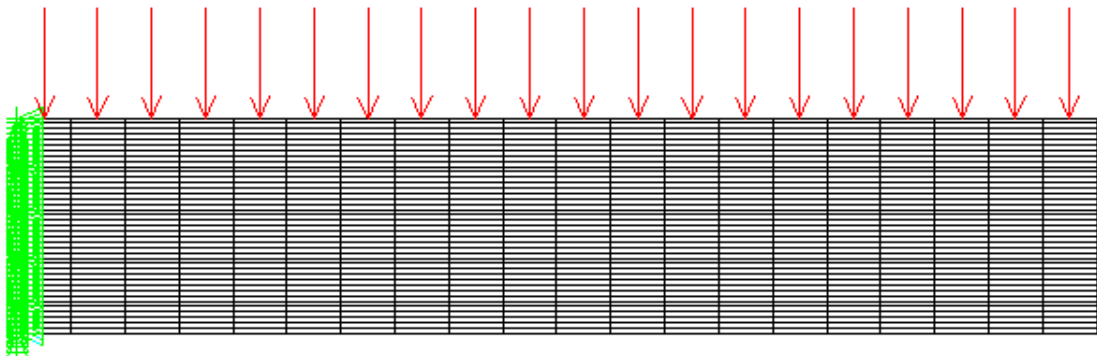


Figura 7.15: Alçado esquerdo

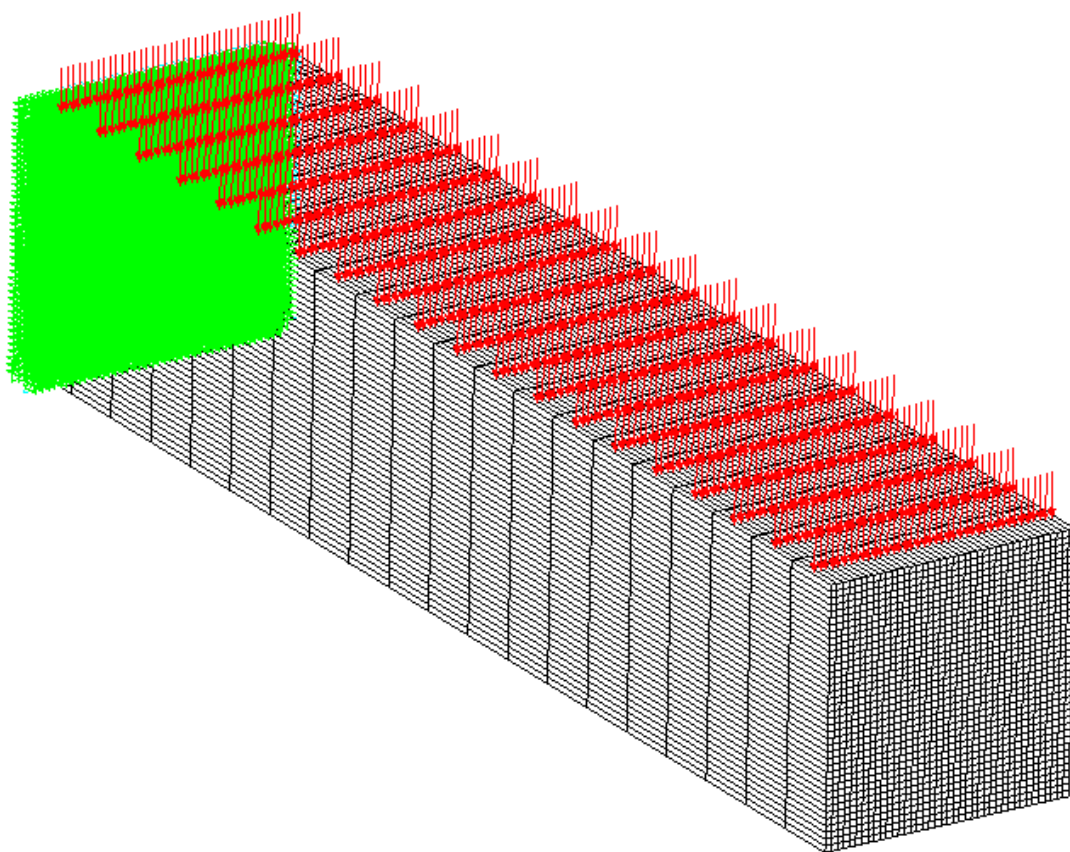


Figura 7.16: Vista em perspectiva das condições de fronteira

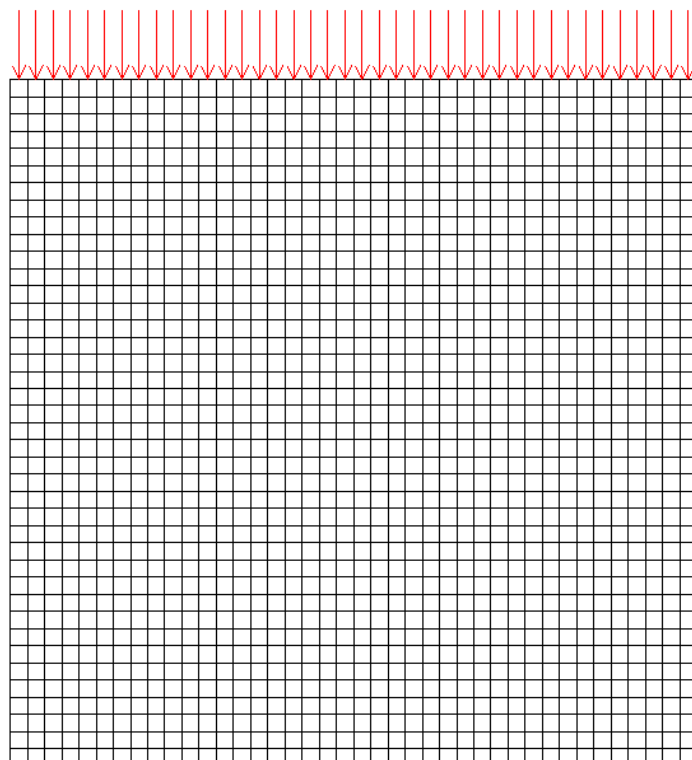


Figura 7.17: Vista frontal

Para estas condições de fronteira, o carregamento aplicado é semelhante ao do caso 1. A flecha máxima é calculada por [21]:

$$\delta = \frac{F_d L^4}{8E^0 I} \quad (7.7)$$

efectuando o mesmo raciocínio que para o caso 1 conclui-se que a única forma de maximizar a rigidez do perfil é aumentando o seu momento de inércia segundo ZZ .

Tendo em conta que este terceiro estudo de caso possui as mesmas distribuições de tensões normais e tangenciais que o primeiro caso de estudo (Figura 7.4 e 7.5) e não possui nenhuma carga aplicada no nó central da secção transversal da mesma, conclui-se que a forma mais rígida será obtida colocando material nos locais mais afastados do centro da secção, i.e, nas arestas do domínio de projecto, produzindo assim o perfil de uma viga em caixão.

A geometria obtida foi tal como previsto a de uma viga em caixão. A flexibilidade final desta viga foi de 43264.2 J. Nas Figuras 7.18 e 7.19 apresentam-se os resultados deste teste.

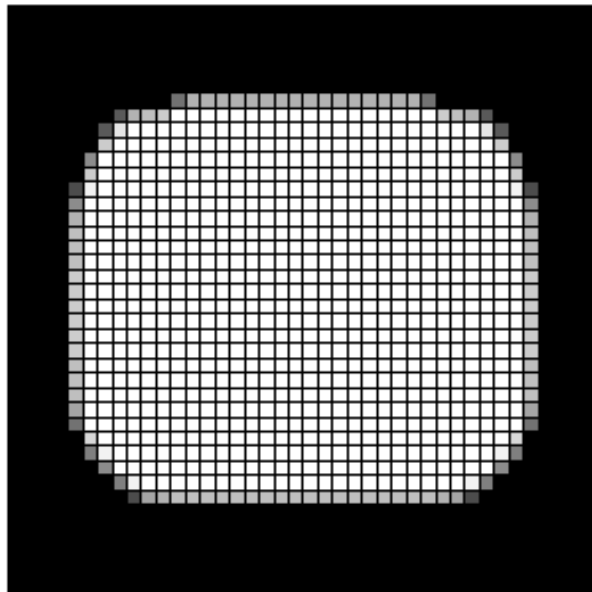


Figura 7.18: Distribuição de densidades na secção transversal do terceiro caso.

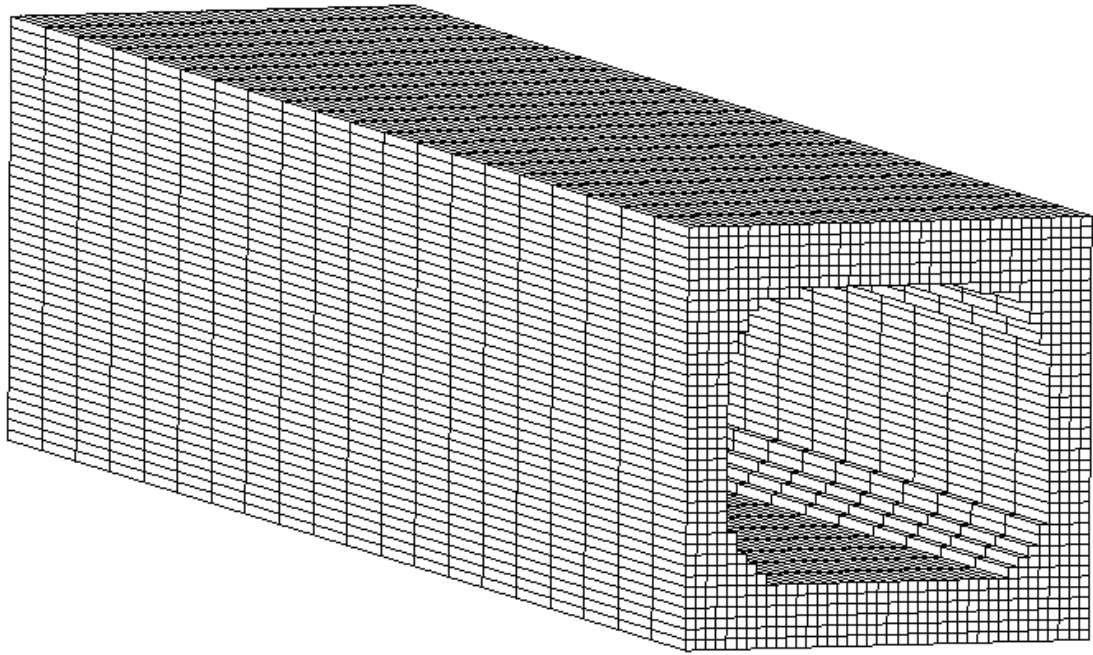


Figura 7.19: Vista de perfil dos elementos com densidades superiores a 0.9 do terceiro caso

O histórico de convergência do terceiro caso apresenta-se nas Figuras 7.20 e 7.21:

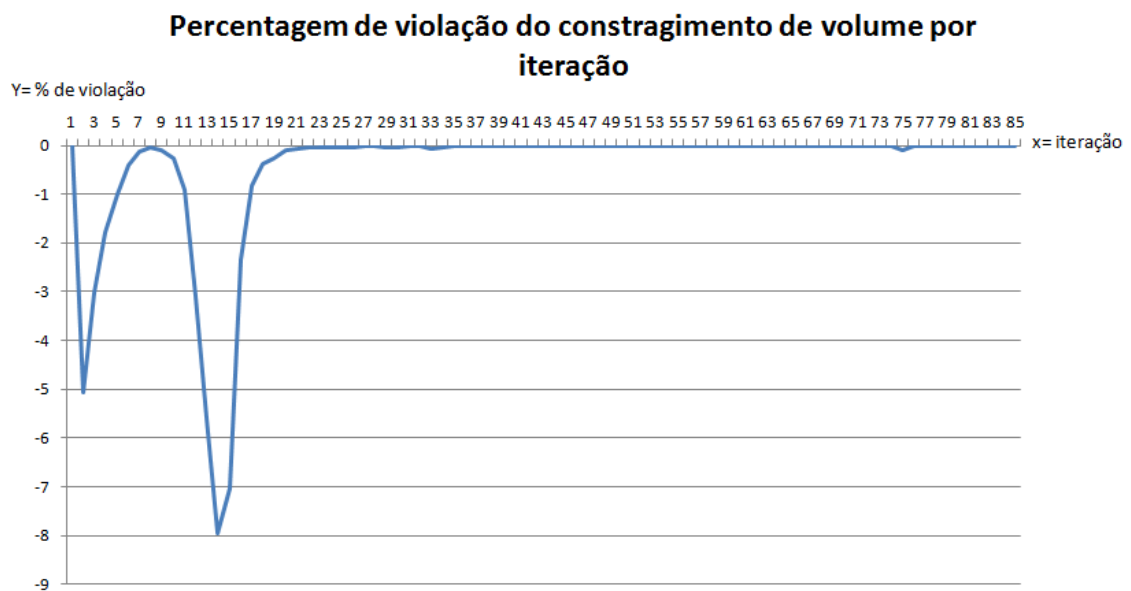


Figura 7.20: Percentagem de violação do constrangimento de volume

Mais uma vez, analisando a Figura 7.20, constata-se o constrangimento de volume nunca foi violado demonstrando o correcto funcionamento do código.

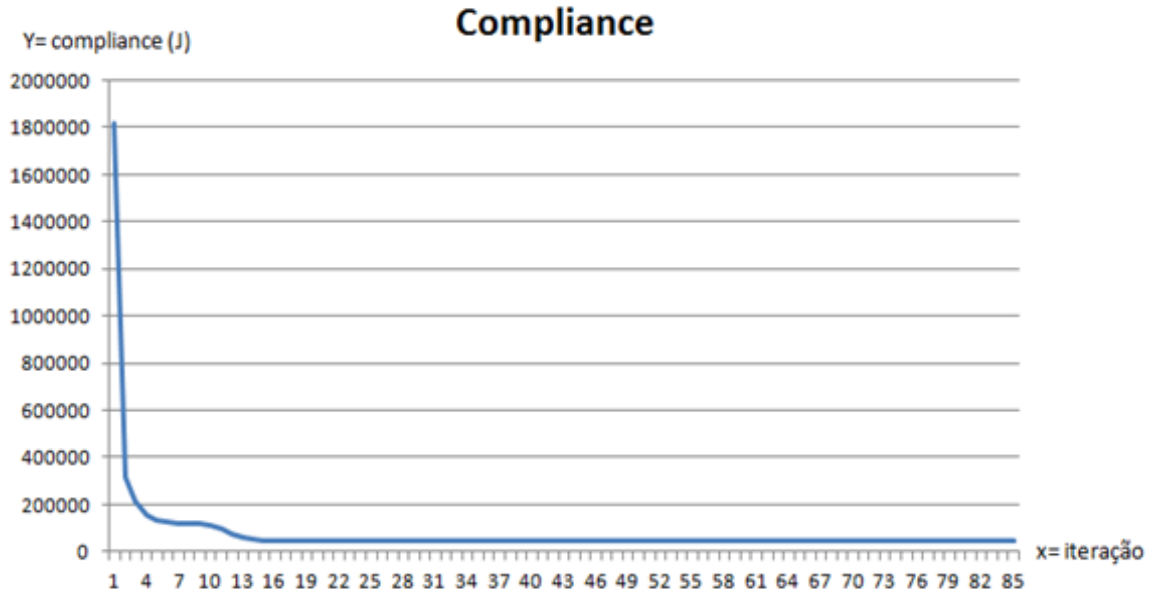


Figura 7.21: Variação da *compliance*

Tal como nos casos 1 e 2, a flexibilidade foi decrescente ao longo da optimização, passando de 1816570 J na primeira iteração para 43264.2 J na última. Este teste permitiu verificar que mais uma vez o código funcionou correctamente

7.2. Efeito de diferentes distribuições iniciais de densidades não uniformes

Este subcapítulo é dedicado a análise do efeito provocado por um campo de densidades inicial que seja diferente do utilizado no subcapítulo 7.1. Os problemas resolvidos vão ser os mesmos que no subcapítulo anterior sendo diferentes apenas o campo de densidades inicial.

De forma a obter uma percentagem de violação do constrangimento de volume igual a zero na primeira iteração foi necessário definir densidades à partida de certas tiras tendo-se depois que calcular a densidade das restantes tiras. A densidade destas últimas é calculada por:

$$\rho_i = \frac{NT \times F_V - \sum_{j=2}^A NT_j \times \rho_j}{NT_i} \quad (7.8)$$

onde ρ_i é a densidade das densidades das tiras cuja densidade não foi atribuída, NT é o número de tiras total, F_V a fracção volúmica (50% nestes casos de estudo), NT_i é o número de tiras com densidade ρ_i , NT_j é o número de tiras com densidade ρ_j definidas à partida.

De forma a estudar o efeito que diferentes densidades iniciais têm na solução nos três estudos de caso do subcapítulo anterior foram usadas duas distribuições diferentes. Na primeira considerou-se que os quatro cantos do domínio de projecto (cubos de 7×7 tiras) com densidade inicial de 70%. Na segunda considerou-se que todas as duas tiras mais próximas da fronteira do domínio de projecto possuem uma densidade de 70%.

Para impedir que o constrangimento de volume fosse violado na primeira iteração foi necessário recorrer à equação (7.8) para calcular as densidades dos elementos que ainda não tinham sido definidas. Para a primeira distribuição obteve-se:

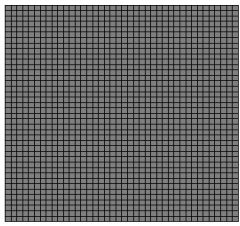
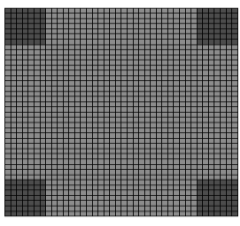
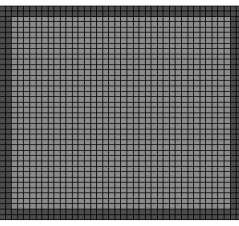
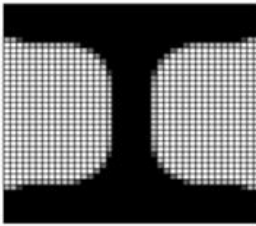
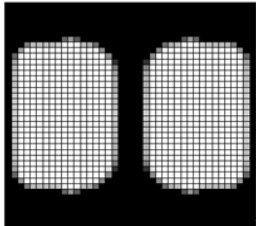
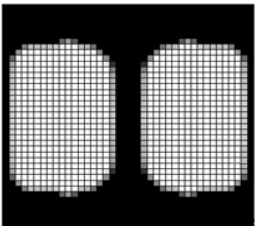
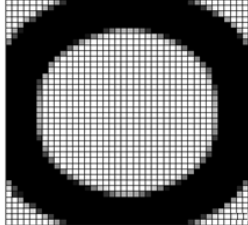
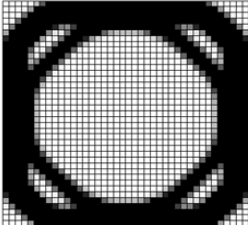
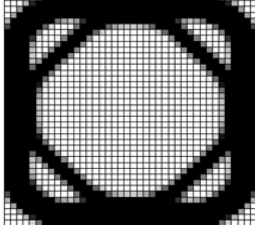
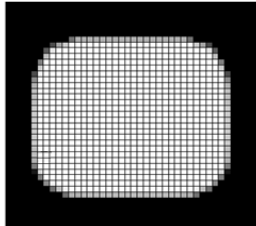
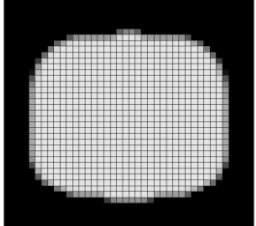
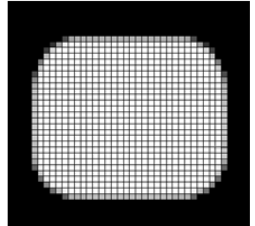
$$\rho_i = \frac{1600 \times 0.5 - 196 \times 0.7}{1404} = 0.47208 \quad (7.9)$$

e para a segunda:

$$\rho_i = \frac{1600 \times 0.5 - 304 \times 0.7}{1296} = 0.453086 \quad (7.10)$$

Os resultados obtidos apresentam-se na Tabela 7.1. Na segunda coluna são apresentados os estudos de caso analisados no subcapítulo 7.1 assim como as respectivas flexibilidades no início e no fim do processo de optimização. Na terceira e quarta coluna são apresentadas as duas distribuições iniciais não uniformes estudadas bem como os resultados obtidos e a respectiva flexibilidade inicial e final.

Tabela 7.1: Influência de diferentes distribuições iniciais de densidades no resultado final

Distribuição inicial			
Viga em consola com carga concentrada			
Flexibilidade inicial	405.66 J	189.89 J	159.74 J
Flexibilidade final	8.85 J	8.92 J	8.93 J
Viga em consola sujeita a um momento torsor			
Flexibilidade inicial	1166300 J	1491050 J	363027 J
Flexibilidade final	25562 J	25930 J	25854 J
Viga em consola com carga distribuída			
Flexibilidade inicial	1816570 J	856559 J	669289 J
Flexibilidade final	43264.2 J	43351.4 J	43298.8 J

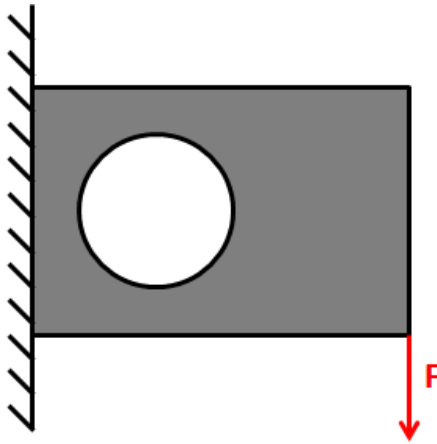
Analisando os valores da flexibilidade final para cada uma das três distribuições analisadas constata-se que os resultados obtidos a partir de densidades iniciais não uniformes produzem resultados sub-óptimos.

7.3. Elementos de não design

Neste subcapítulo vai ser estudada a influência que elementos de não *design* têm no resultado final dos casos de estudo do subcapítulo 7.1. De forma a evitar modificar o programa para que este seleccionasse e optimizasse apenas com elementos de *design* tal como em (5.19) foi usado um método baseado no facto de o algoritmo aumentar a densidade nas tiras com elevada energia de deformação e diminui-la nas tiras com baixa energia (ver Capítulo 6 subcapítulo 6.2.). Para isso, atribuiu-se às tiras de não *design* um valor fixo para as suas sensibilidades para assim controlar o valor da energia de deformação usada na ultima equação de (6.9). Atribuindo um valor muito elevado à sensibilidade de uma tira de não *design* (por exemplo, 1×10^{11}), o algoritmo vai actualizar o valor da densidade desta sempre para 1 em todas as iterações, forçando assim que essas tiras sejam sempre de material com densidade 1. A atribuição de uma sensibilidade muito baixa faz com que a densidade dessa tira seja sempre igual a 0.01 (ρ_{min}) durante toda a optimização. É de referir mais uma vez que estes valores limites, 0.01 e 1, aparecem pois o constrangimento $0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1$ assim o exige. A implementação deste método pode ser feita também utilizando o filtro das sensibilidades, mas tendo em conta que as sensibilidades dos elementos de não *design* deverão ter peso zero na média dos gradientes.

7.3.1. Resultados 2D

De forma a confirmar a validade do método foi corrido o código de 99 em Matlab escrito por O.Sigmund [13] com o critério de optimalidade e o código em FORTRAN77 original, i.e, sem estar a optimizar o domínio de projecto por tiras, com o MMA para se perceber se os resultados obtidos eram os mesmos. No caso do código em Matlab, correram-se duas análises, uma sem filtro e outra com filtro. Para o código escrito em FORTRAN correu-se a análise com e sem filtro de sensibilidades. Em ambos os testes foi usada a mesma malha (45 elementos na horizontal, 30 na vertical), $p=3$, uma fracção volúmica de 50%, o mesmo material e a mesma carga. Os resultados obtidos são apresentados nas Figura 7.22 e 7.23:



a)



b)



c)



d)



e)

Figura 7.22: Resultados obtidos sem filtro e com filtro, a) Domínio de projecto,
b) Matlab com critério de optimalidade sem filtro , c) FORTRAN com MMA sem filtro
d) Matlab com critério de optimalidade com filtro de sensibilidades,
e) FORTRAN com MMA com filtro de sensibilidades

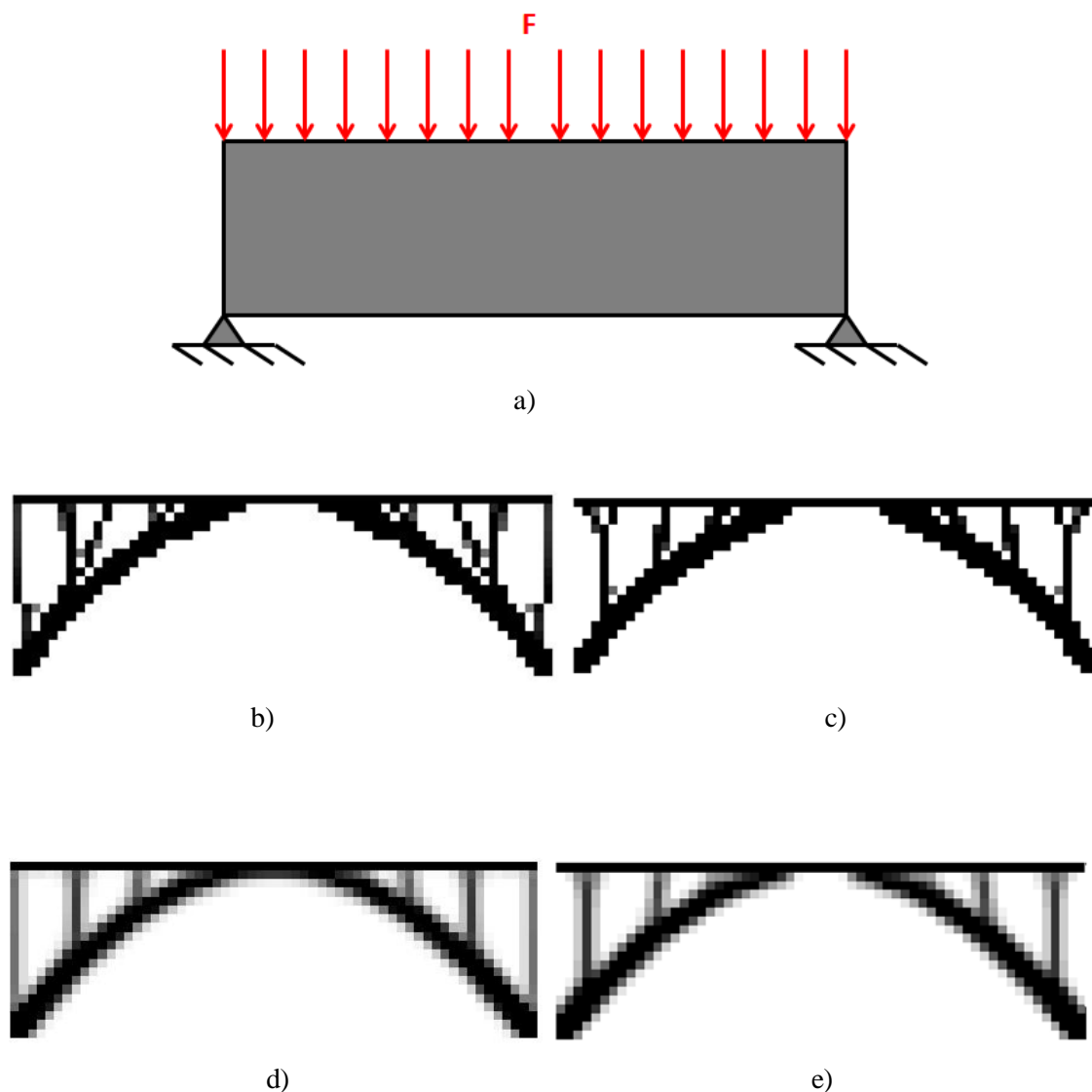


Figura 7.23: Resultados obtidos sem filtro e com filtro, a) Domínio de projecto,
b) Matlab com critério de optimalidade sem filtro , c) FORTRAN com MMA sem filtro
d) Matlab com critério de optimalidade com filtro de sensibilidades,
e) FORTRAN com MMA com filtro de sensibilidades

Como se pode ver os resultados são muito semelhantes em ambos os casos, (Figura 7.22 e 7.23). Tendo em conta as Figuras 7.22, 7.23 e tudo o que foi descrito anteriormente conclui-se que o método de atribuir valores fixos as sensibilidades dos pontos de não *design* funciona.

Por fim há que referir que foi necessário definir, para a primeira iteração, um campo de densidades inicial que tivesse em conta a presença de tiras de não *design* à partida. Para isso, atribuiu-se às tiras de não *design* densidade 1 ou 0.01, consoante o pretendido, e calculou-se para as restantes tiras a densidade que estas deveriam ter para que o constrangimento de volume não fosse violado na primeira iteração:

$$\rho_i = \frac{NT \times F_V - \sum_j NT_j \times 1 - \sum_k NT_k \times 0.01}{NT_i} \quad (7.11)$$

onde ρ_i é a densidade das densidades das tiras cuja densidade não foi atribuída, NT é o número de tiras total, F_V a fracção volúmica (que nestes testes é sempre 50%), NT_j é o número de tiras com densidade 1, NT_k é o número de tiras com densidade 0.01.

7.3.2. Resultados 3D

Para analisar o efeito de elementos de não *design* na viga em consola com força concentrada introduziu-se uma zona de não *design* (densidade 0 ou vazio) composta por 6 tiras na direcção Y e 14 segundo Z para o caso da viga com carga concentrada. No caso das vigas em consola sujeita a um momento torsor e a uma carga distribuída, introduziu-se um conjunto de tiras de não *design* (densidade 1 ou sólido) no centro dos mesmos para ver como é que decorria a optimização (14 tiras na direcção Y e 16 segundo Z). O valor da densidade inicial das tiras de *design* foi calculado com a equação (7.11) cuja utilização é idêntica à mostrada nas equações (7.9) e (7.10) não sendo por isso apresentados os cálculos. No entanto a densidade dessas mesmas tiras é de 0.52715 para o caso 1, 0.418605 para o caso 2 e 3.

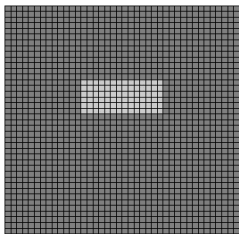
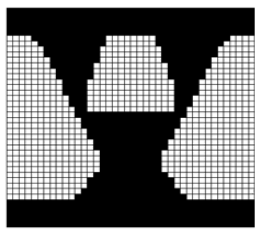
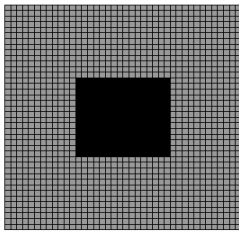
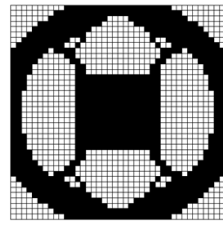
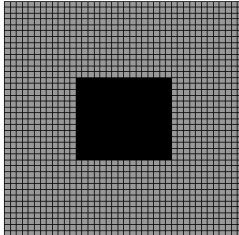
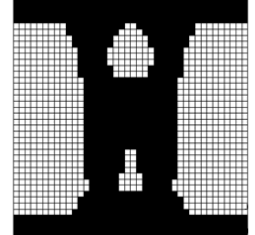
Os resultados são apresentados na Tabela 7.2 que apresenta na segunda coluna a distribuição uniforme de densidades iniciais e pontos de não *design* e na terceira coluna o resultado da optimização.

Analisando a Tabela 7.2 constata-se que para o caso 1, a presença de um furo perto da zona de aplicação da carga fez com que o algoritmo criasse duas colunas que contornam o mesmo de forma a ligar a alma do perfil I ao banzo superior.

No caso 2, a presença de material no centro do cilindro fez com que o algoritmo ligasse essa região às paredes da coroa cilíndrica.

No caso 3, constata-se que a topologia obtida é a mesma de um perfil em I mas neste caso com dois furos na alma.

Tabela 7.2: Influência de pontos de não *design* no resultado final.

-	Distribuição inicial com pontos de não <i>design</i>	Resultado final
<p>Caso 1</p> <p>Flexibilidade</p>	 <p>306.72 J</p>	 <p>9.30 J</p>
<p>Caso 2</p> <p>Flexibilidade</p>	 <p>1692420 J</p>	 <p>32219.80 J</p>
<p>Caso 3</p> <p>Flexibilidade</p>	 <p>35269000 J</p>	 <p>1142110 J</p>

Uma vez que as ligações entre a zona de material de não *design* e a coroa cilíndrica da viga em consola sujeita a um momento torsor contêm ramificações pequenas semelhantes às apresentadas na Figura 5.5, optou-se por correr este exemplo com o filtro ligado. Uma vez que este exemplo é constituído por elementos de *design* e de não *design* com densidade 1, foi necessário efectuar uma alteração ao valor dos gradientes dos elementos de não *design* para que estes não entrassem no cálculo da média da equação (6.12). Tal foi conseguido através da atribuição do valor zero aos gradientes dos elementos de não *design* antes de estes serem contabilizados para o cálculo da média ponderada das densidades sendo em seguida repostos com o valor 1×10^{11} quando terminado o processo de filtragem. Esta alteração não seria necessária caso os elementos de não *design* fossem elementos de densidade 0.01 pois o seu

gradiente é à partida definido como zero. Na Figura 7.24 apresentam-se os resultados do caso de carga 2 com elementos de não *design* corrido sem e com filtro:

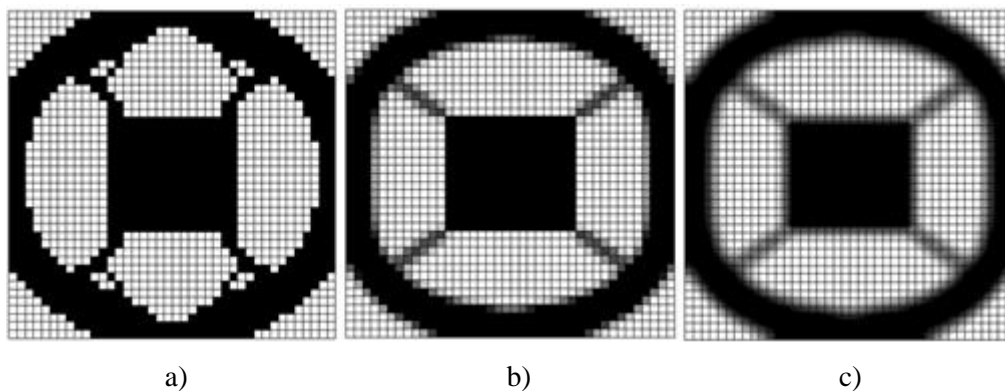


Figura 7.24: Resultados para o caso 2, a) sem filtro de sensibilidades,
b) com filtro de sensibilidades,
c) com filtro de sensibilidades e media das densidades calculada pelo ANSYS.

Capítulo 8

Optimização de topologia de uma guarda de segurança

Este capítulo destina-se à optimização (maximização da rigidez) da guarda de segurança rodoviária através do algoritmo descrito no Capítulo 6 subcapítulo 6.3. A optimização foi efectuada com uma penalização (SIMP) $p=4$, um raio do filtro inicial de 2 e uma fracção volúmica de 25%. O motivo para a escolha deste valor para a fracção volúmica está associado com o facto de que para a reduzir, seria necessário discretizar a secção transversal do domínio de projecto com uma malha mais refinada o que elevaria ainda mais o custo computacional da optimização já de si elevado.

Nesta secção da dissertação começa-se por apresentar o domínio de projecto e respectivas condições de fronteira. Segue-se a apresentação do perfil optimizado e a análise do mesmo em elementos finitos para ser comparado do ponto de vista dos deslocamentos e flexibilidade com um modelo da guarda de segurança em W actual com a mesma fracção volúmica.

8.1. Modelo

De forma a otimizar o perfil da guarda de segurança rodoviária considerou-se um domínio de projecto com as mesmas dimensões longitudinais do modelo da guarda de segurança em *W* actual apresentado no Capítulo 3, i.e., um ecrã de 10m de comprimento com os restantes 58.6m modelados com molas lineares e ancorado ao solo por seis prumos de secção transversal em *C* com 520mm de comprimento.

Uma vez que o código de optimização descrito no Capítulo 6 subcapítulo 6.3 destina-se a otimizar domínios de projecto prismáticos rectos definiu-se que a secção transversal deste seria um rectângulo que envolvesse todo o ecrã da guarda de segurança em *W*, i.e., 81mm na direcção horizontal e 310mm na direcção vertical como ilustra a Figura 8.1.

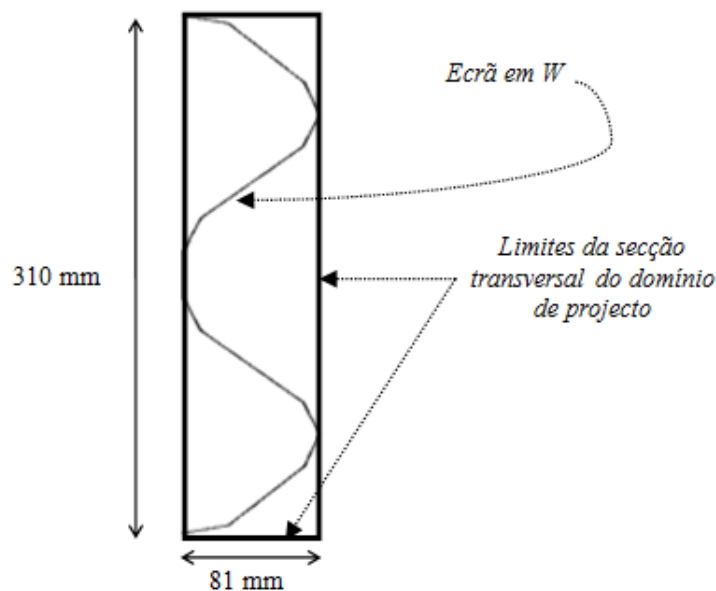


Figura 8.1: Dimensões da secção transversal do domínio de projecto

O material utilizado para o domínio de projecto e para os prumos foi o mesmo aço S235JR que compõe a guarda de segurança em *W* (Tabela 2.1). De forma a diminuir o custo computacional da análise, foi considerado que os prumos se encontram encastrados ao solo e que o material do domínio de projecto possui comportamento linear.

Construiu-se então um modelo onde o domínio de projecto foi discretizado por 100000 elementos *SOLID45* (40 elementos na vertical, 20 elementos na horizontal e 125 elementos ao longo do comprimento), os prumos por 36 elementos *BEAM4* (6 elementos por prumo) e 1722 elementos *COMBIN14* para modelar as molas lineares nos extremos laterais do domínio de

projecto. As molas lineares foram ancoradas e os nós fixos tal como no modelo da guarda de segurança em W do Capítulo 3. O modelo resultante desta discretização é apresentado na Figura 8.2:

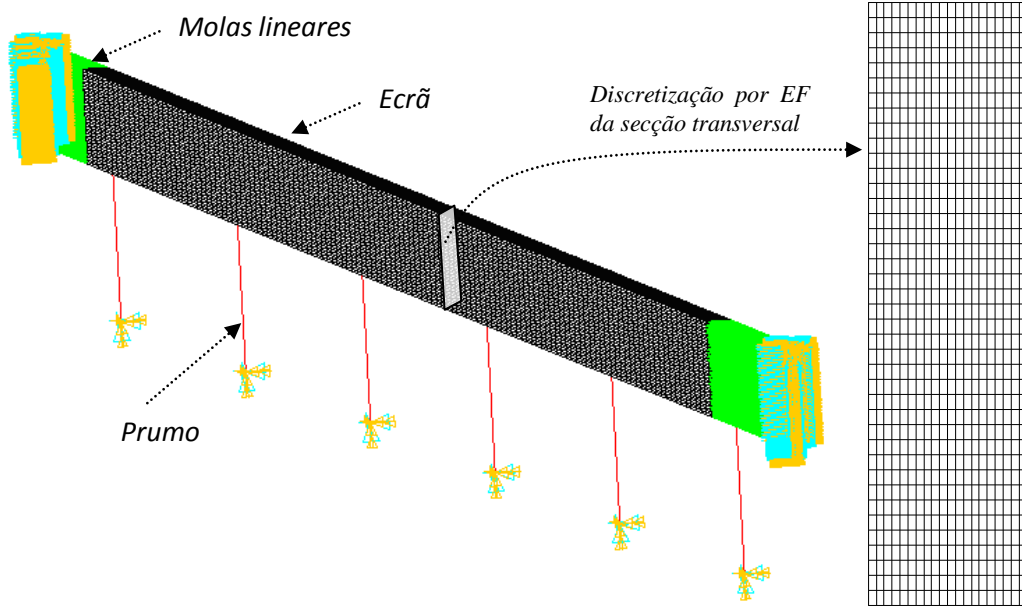


Figura 8.2: Modelo usado na otimização

O cálculo da rigidez das molas no modelo apresentado na Figura 8.2 revelou-se problemático por dois motivos. Por um lado, tal rigidez é dependente do valor da área da secção transversal do ecrã e também depende do número de molas ligadas ao ecrã. A topologia da secção do perfil só é conhecida no final do processo de otimização pois de iteração para iteração as variáveis de densidade vão sendo alteradas dentro do intervalo [0.01,1]. No entanto, sendo o constrangimento de volume imposto de 25%, a área final do perfil ocupará um quarto da área total da secção transversal do domínio de projecto. Assim sendo obtém-se:

$$A^* = A_D \times 0.25 = 0.081 \times 0.31 \times 0.25 = 0.0062775m^2 \quad (8.1)$$

em que A^* é a área da secção transversal do perfil optimizado e A_D a área da secção transversal do domínio de projecto. Por outro lado, a definição das molas lineares para simular a rigidez dos restantes 58.6 m de comprimento está associada ao número de nós nas secções das extremidades do perfil para assim aplicar um conjunto de molas em paralelo, uma por cada nó. Uma vez que a topologia do perfil não está definida à partida, mas sim é objecto de optimização, optou-se por utilizar o número total de nós da secção transversal (rectangular) do domínio de projecto, i.e., 861 (ver Figura 8.2 que mostra a malha de EF da secção transversal). O valor da área calculado em (8.1) foi então aplicado na equação (3.5) e o de 861 na equação (3.6) obtendo-se uma rigidez de 52255.9 N/m para as molas lineares.

Uma vez construído o modelo aplicaram-se os casos de carga apresentados no Capítulo 3 na Tabela 3.2. Ao contrário do que foi feito no Capítulo 3 subcapítulo 3.4, as cargas foram aplicadas pontualmente em nós localizados à cota vertical dos frisos salientes da solução do perfil em W. A Figura 8.3 ilustra o modelo completo com os quatro casos de carga aplicados.

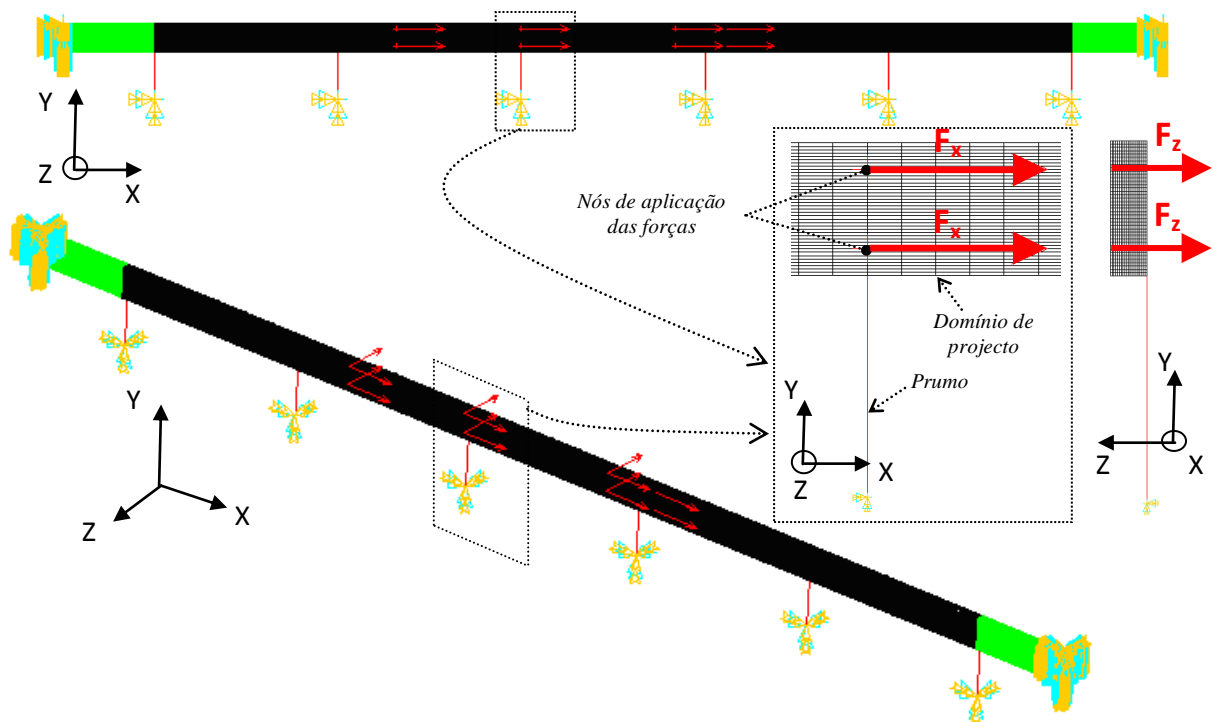


Figura 8.3: Aplicação dos quatro casos de carga no modelo

A ligação entre os prumos e o domínio de projecto foi feita de forma semelhante à usada no Capítulo 3, i.e., ligou-se cada prumo a dois nós do ecrã (ver Figura 8.4).

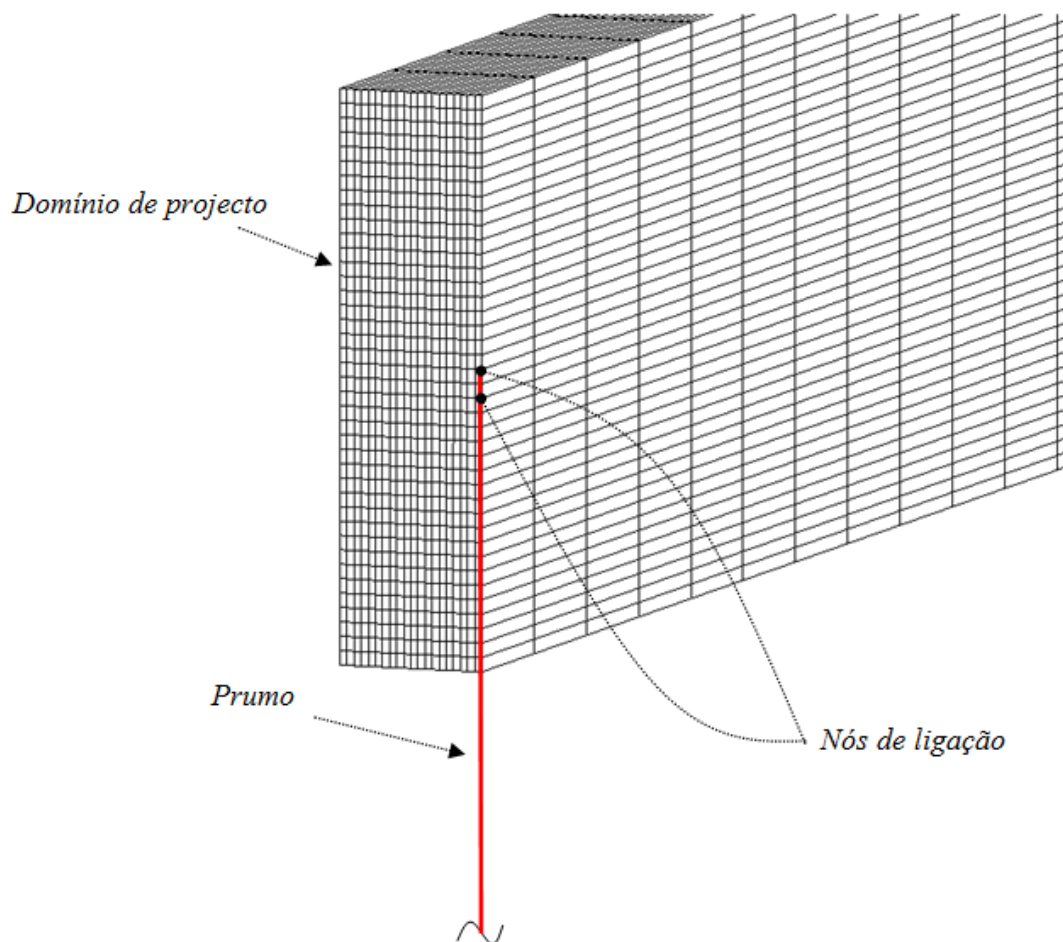


Figura 8.4: Nós de ligação entre o domínio de projecto e os prumos

8.2. Perfil optimizado

A optimização do domínio de projecto foi efectuada com uma penalização (SIMP) $p=4$, um raio do filtro inicial de 2 e uma fracção volúmica de 25% tal como foi explicado no início do capítulo. A optimização foi terminada quando os valores da flexibilidade e do constrangimento de volume convergiram, i.e., a flexibilidade deixou de variar e a violação do constrangimento de volume foi de zero por cento (constrangimento activo). A flexibilidade aqui considerada como função objectivo refere-se à energia total de deformação apenas do ecrã que se pretende maximizar. Os gráficos de convergência da flexibilidade (*compliance*) e da violação do constrangimento de volume ao longo das iterações são apresentados nas Figura 8.5 e 8.6.

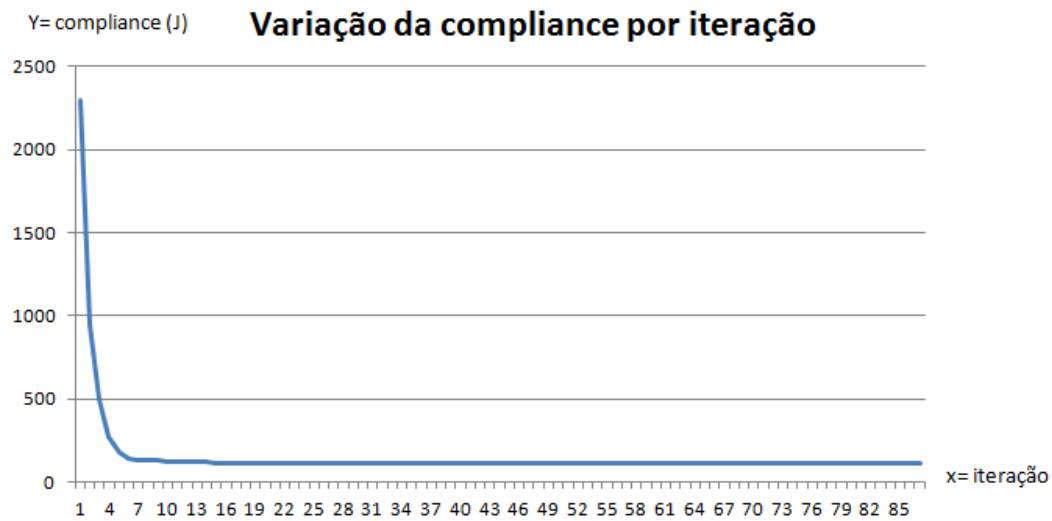


Figura 8.5: Variação da *compliance* do ecrã ao longo das iterações

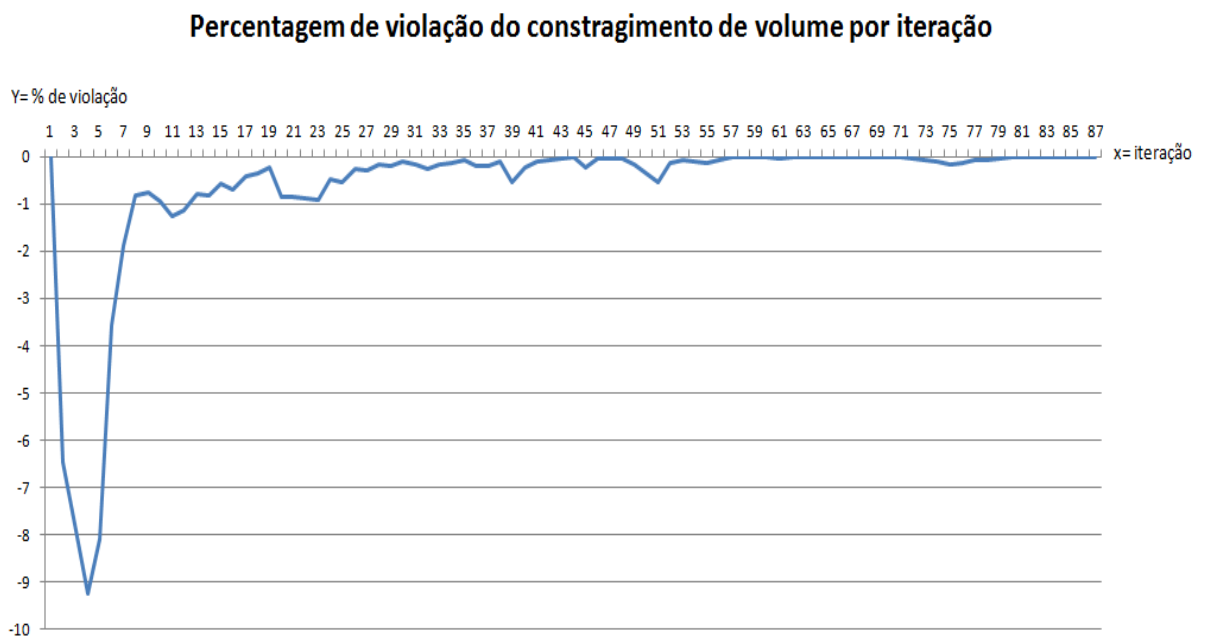


Figura 8.6: Variação da percentagem de violação do constrangimento de volume ao longo das iterações

Uma vez que a optimização foi corrida com filtro, o resultado final apresenta alguns elementos com densidades intermédias (ver Figuras 8.7a e 8.7b). Uma vez que se pretende obter um perfil com forma bem definida torna-se necessário corrigir o campo de densidades obtido para um campo composto unicamente por uns e zeros (pontos com e sem material, respectivamente). Para isso foi necessário determinar qual o número de elementos cujas

densidades deveriam ser um. Uma vez que se impôs durante a optimização que o volume final fosse 25% do volume inicial, tal significa que apenas 25% dos elementos que discretizam a secção transversal do domínio de projecto poderiam ter densidade igual a 1. Tendo em conta que esta é composta por 800 elementos tal implica que apenas 200 elementos poderão ter densidade igual a 1. Foram então seleccionados os 200 elementos com maior densidade (intervalo de selecção de densidades é $[0.348,1]$) e atribuiu-se-lhes densidade 1. Aos 600 elementos restantes corrigiu-se-lhes a densidade para 0.01 (ver Figura 8.7c). Na Figura 8.7 apresentam-se os resultados da optimização antes e após correcção dos valores das densidades:

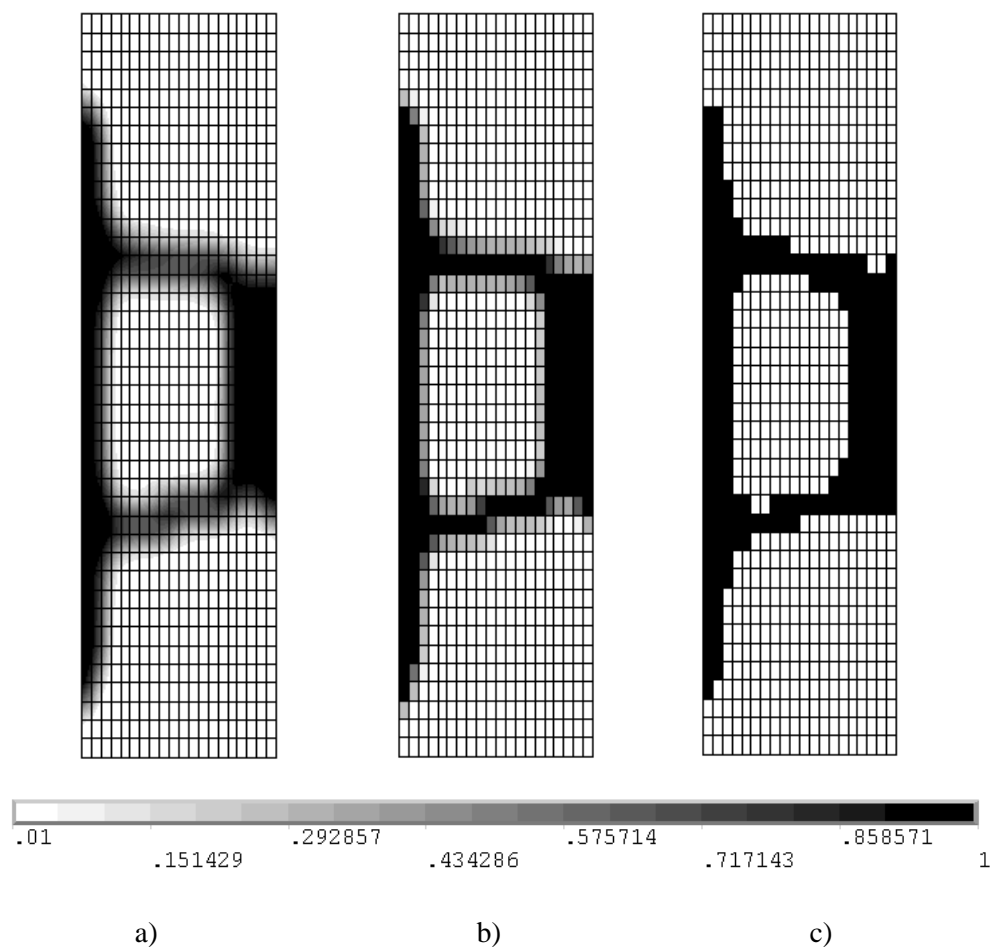


Figura 8.7: Resultados obtidos após optimização:

- a) distribuição de densidade (valores médios obtidos no ANSYS⁵),
b) distribuição de densidade (sem média no ANSYS), c) correcção das densidades para 0's e 1's.

O valor da flexibilidade do ecrã (energia total de deformação absorvida apenas pelo ecrã) para o perfil obtido antes da correcção do campo de densidades foi de 115,01J. Ao analisar o perfil obtido (Figuras 8.7a e 8.7b) constata-se que apesar de não ter sido modelado o absorçor,

⁵ O ANSYS permite apresentar a densidade de cada elemento como a média das densidades com os elementos imediatamente adjacentes

após a optimização, o perfil do ecrã optimizado caracteriza-se pela existência de uma estrutura equivalente ao absorçor, ao longo de todo seu comprimento.

8.3. Comparação entre o perfil em W e o perfil optimizado

De forma a poder comparar-se o perfil optimizado com o perfil em W actual construiu-se “manualmente” um campo de densidades composto unicamente por densidades 0.01 e 1 de forma a obter um perfil em W com a mesma área da secção transversal do perfil optimizado, i.e., 0.0062775 m^2 ao longo dos 10 m de comprimento do domínio de projecto apresentado na Figura 8.2. Este campo de densidades é apresentado na Figura 8.8:

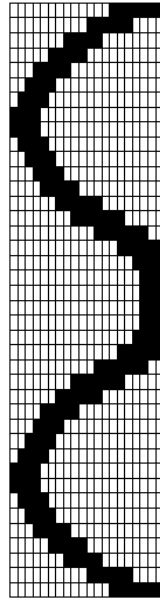


Figura 8.8: Perfil em W no domínio de projecto

Procedeu-se então à remoção dos elementos com densidade 0.01 do domínio de projecto de forma a obter apenas os elementos com densidades 1 (200 elementos). Para que este modelo estivesse de acordo com o *NCHRP Report 350* [15] foram aplicadas molas em cada uma das extremidades do perfil de forma a simular os 58.6 m não modelados. Uma vez que a secção transversal possui 310 nós de acordo com (3.5) e (3.6) obtém-se:

$$K_t = \frac{EA}{L} = \frac{210 \times 10^9 \times 0.0062775}{\frac{68.6 - 10}{2}} = 4.49923 \times 10^{-7} \text{ N/m} \quad (8.2)$$

$$K = \frac{K_t}{n_n} = \frac{4.49923 \times 10^{-7}}{310} = 145136.5 \text{ N/m} \quad (8.3)$$

Procedendo da mesma forma com o perfil otimizado apresentado na Figura 8.7 c), i.e, seleccionando apenas os elementos com densidades 1 do perfil (200 elementos), obteve-se uma guarda de segurança de 10 m com o perfil otimizado. Tendo em atenção que a equação (8.2) é válida para os dois perfis, pois ambos têm a mesma área de secção transversal, a única diferença agora reside no número de nós em (8.3). Uma vez que o perfil otimizado possui 278 nós na secção transversal obtém-se:

$$K = \frac{K_t}{n_n} = \frac{4.49923 \times 10^{-7}}{278} = 161842.88 N/m \quad (8.4)$$

Na Figura 8.9 apresentam-se as secções transversais das duas guardas de segurança e as molas associadas a cada uma delas:

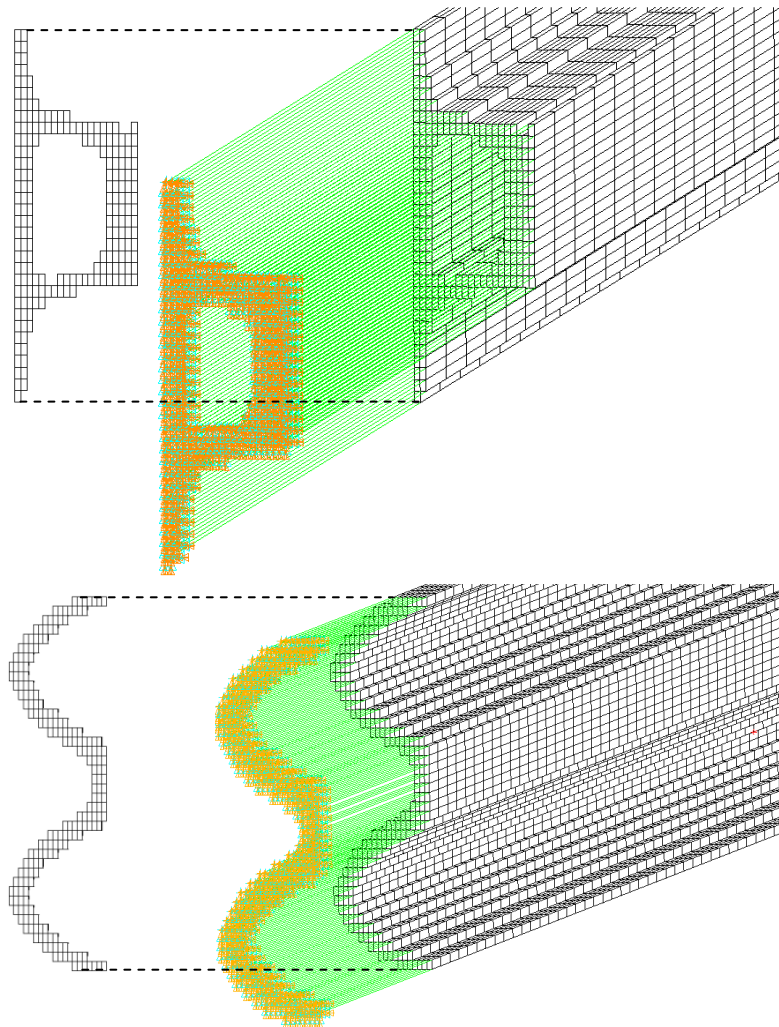


Figura 8.9: Secções transversais do perfil otimizado e em W com as respectivas molas

Correu-se então uma análise estática linear de elementos finitos no ANSYS para determinar quais os deslocamentos máximos, e flexibilidade do ecrã. Os valores máximos das tensões e extensões não são aqui apresentados e são afectados por efeitos de concentração de tensões nas zonas de aplicação das forças concentradas e de ligação aos prumos.

Em seguida apresentam-se as estruturas deformadas e os valores dos deslocamentos (soma vectorial dos deslocamentos medidos nas direcções cartesianas) que cada caso de carga provocou nos dois tipos de ecrã (Figuras 8.10 e 8.11 para o ecrã em W e nas Figuras 8.12 e 8.13 para o ecrã optimizado):

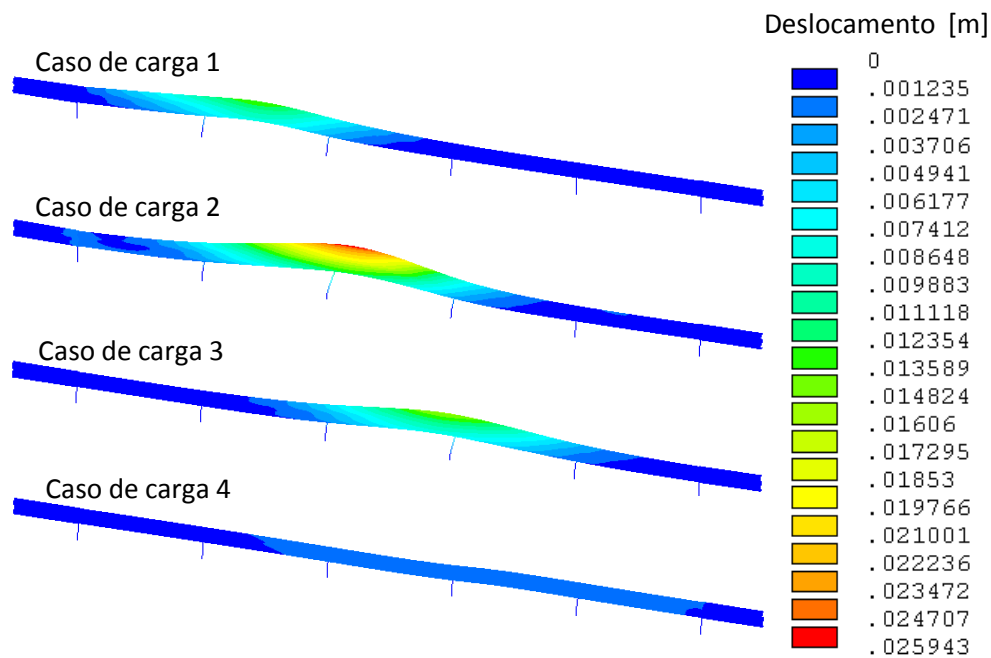


Figura 8.10: Deslocamentos máximos provocados pelos quatro casos de carga no ecrã em W (factor de escala de 30)

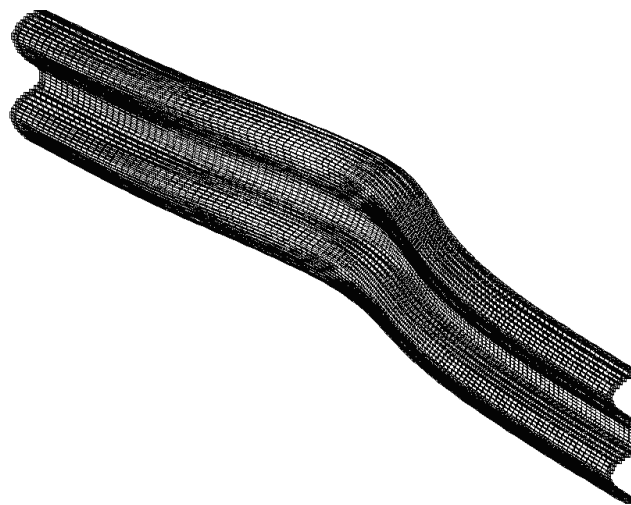


Figura 8.11: Deformação do ecrã em W causada pelo caso de carga 2 (factor de escala de 10)

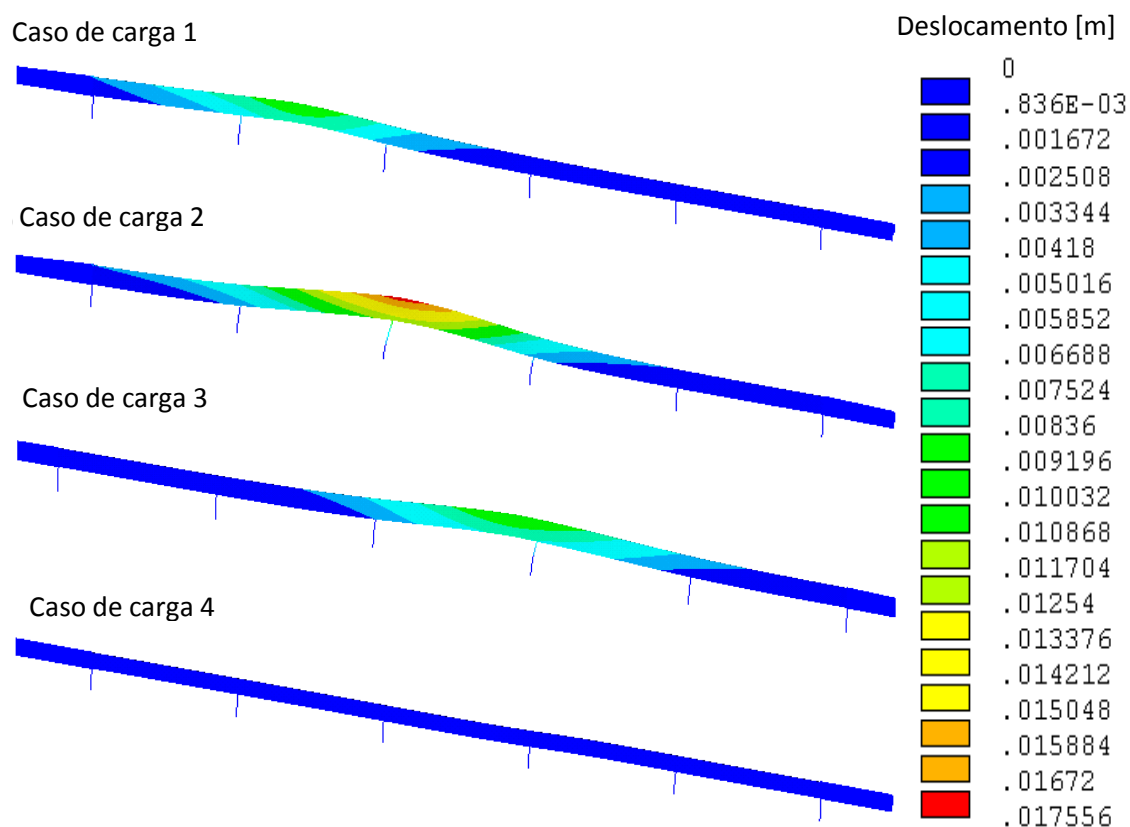


Figura 8.12: Deslocamentos máximos provocados pelos quatro casos de carga no ecrã optimizado (factor de escala de 30)

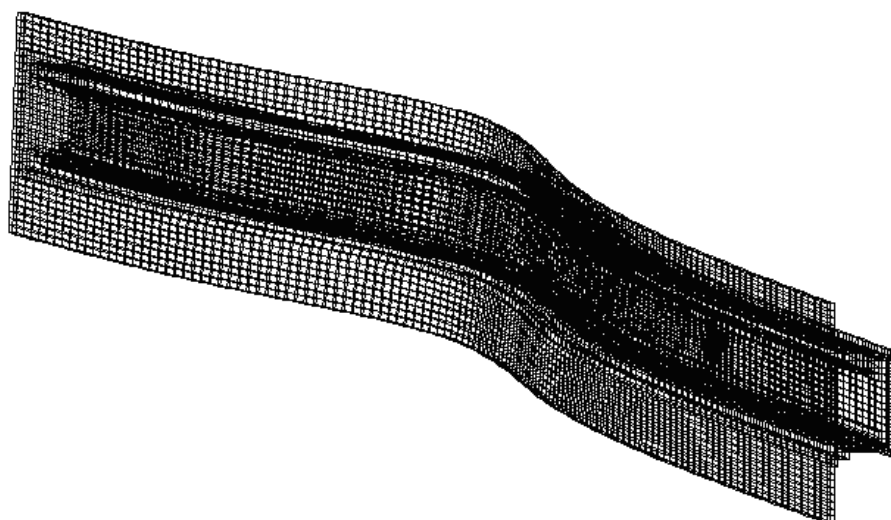


Figura 8.13: Deformação do ecrã optimizado causada pelo caso de carga 2 (factor de escala de 10)

De forma a analisar os resultados referentes aos dois ecrãs apresentam-se as tabelas 8.1 e 8.2 com informação de deslocamento e flexibilidade do ecrã.

Tabela 8.1: Deslocamentos máximos [m] nas guardas de segurança com ecrã em W e otimizado.

Caso de Carga	Ecrã em W	Ecrã Otimizado	Desvio relativo ao ecrã em W
1	0.013582	0.009525	-29.87 %
2	0.025943	0.017556	-32.33 %
3	0.015196	0.010405	-31.528 %
4	0.002155	0.001675	-22.27 %

Tabela 8.2: Flexibilidade [J] dos ecrãs das guardas de segurança em W e otimizada.

Caso de Carga	Ecrã em W	Ecrã Otimizado	Desvio relativo ao ecrã em W
1	71.5284	63.5442	-11.16 %
2	197.272	200.926	1.85 %
3	87.1939	88.8184	1.86 %
4	54.5903	50.870	-6.81 %
Soma ponderada das flexibilidades (pesos $w_i = 0.25$), $\sum w_i c_i$	102.646	101.04	-1.56 %

Como se pode ver na Tabela 8.1, os maiores valores de deslocamento são obtidos para o segundo caso de carga. Tal como foi explicado no Capítulo 4 subcapítulo 4.5, isto deve-se ao facto de este ser o caso de carga com maior componente da força perpendicular ao ecrã. Os deslocamentos máximos apresentados são o resultado da soma vectorial dos deslocamentos segundo XX , YY e ZZ . Ao analisar os deslocamentos máximos conclui-se que o ecrã otimizado tem menores deslocamentos para todos os casos de carga. De forma a explicar este resultado podem ser comparados os momentos de inércia de cada um dos perfis. Na Figura 8.14 apresentam-se os dois perfis juntamente com os eixos que passam pelo centroide de cada um. Utilizando o ANSYS obtêm-se os valores das propriedades geométricas para cada uma das secções (ver Tabela 8.3).

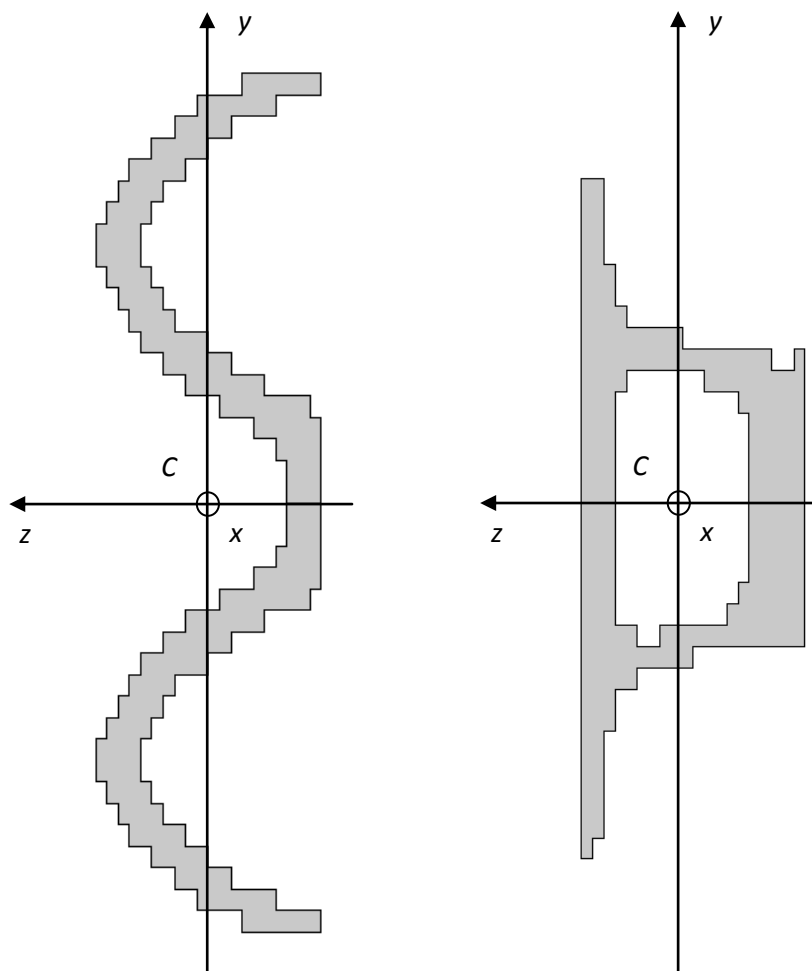


Figura 8.14: Secções transversais e eixos de inércia no centroide do perfil a) em W, b) optimizado.

Tabela 8.3: Propriedades geométricas do perfil em W e optimizado

Propriedade	Ecrã em W	Ecrã optimizado
$A [m^2]$	0.0062275	0.0062275
$J_c [m^4]$	0.56338×10^{-4}	0.23084×10^{-4}
$I_{yy} [m^4]$	0.33816×10^{-5}	0.55105×10^{-5}
$I_{zz} [m^4]$	0.52957×10^{-4}	0.17573×10^{-4}
$I_{yz} [m^4]$	0	0.24606×10^{-6}

Como se pode ver através da Tabela 8.3, o ecrã otimizado oferece maior resistência à flexão em torno do eixo vertical YY comparativamente ao ecrã em W . A flexão em torno de YY é provocada pelas componentes das forças perpendiculares ao ecrã. Visto que o momento de inércia I_{yy} do perfil otimizado é 1.63 vezes superior ao do perfil em W percebe-se que o ecrã otimizado apresente menores valores de deslocamento na direcção perpendicular ao ecrã. Contudo, o perfil otimizado oferece menor resistência à flexão em torno de ZZ (I_{zz} é menor) e possui uma resistência à torção inferior à do W (J_C é menor). O valor baixo ou mesmo nulo do produto de inércia I_{yz} permite concluir que os eixos indicados na Figura 8.14, que passam pelo centroide da secção, são também eixos principais de inércia.

Na Tabela 8.2 constata-se que a energia total de deformação absorvida pelo ecrã (flexibilidade do ecrã) em ambos os perfis é de valor muito semelhante. No entanto, verifica-se que a distribuição de energia de deformação no domínio dos ecrãs em W e otimizado é diferente. O ecrã em W apresenta maior energia de deformação nas zonas entre prumos e menor na zona de ligação aos prumos. Em contraste, o ecrã otimizado absorve mais energia nas zonas de ligação aos prumos e menos nas zonas entre prumos (meio-vão). De facto, a ligação do ecrã aos prumos é afectada por um efeito local de concentração de tensões e é mais rígida no caso do ecrã otimizado em comparação com o W . Para quantificar esta observação apresenta-se a Tabela 8.4 que mostra os valores de flexibilidade contabilizando apenas as partes do ecrã entre prumos, i.e., os elementos do ecrã na zona de ligação aos prumos foram desseleccionados.

Tabela 8.4: Flexibilidade [J] dos ecrãs em W e otimizado desseleccionando elementos na vizinhança dos prumos.

Caso de Carga	Ecrã em W	Ecrã Otimizado	Desvio relativo ao ecrã em W
1	66.7946	52.6322	-21.20 %
2	151.633	126.897	- 16.31 %
3	70.4638	63.1560	-10.37 %
4	39.7197	36.0804	-9.16 %
Soma ponderada das flexibilidades (pesos $w_i = 0.25$), $\sum w_i c_i$	82.1528	69.69	-15.17 %

Os resultados obtidos mostram que a flexibilidade do ecrã otimizado é agora sempre inferior à do ecrã em W . Para contabilizar a energia de deformação absorvida pelo ecrã na zona dos prumos poder-se-ia fazer a diferença entre os valores da flexibilidade das tabelas 8.2 e 8.4. Nesse caso, poder-se-ia então verificar que a energia de deformação absorvida pelo ecrã otimizado seria maior do que a absorvida pelo W na zona dos prumos.

Assim sendo, conclui-se que o ecrã otimizado ao flectir menos absorve mais energia no local onde estão aplicados os prumos (ligação mais rígida) ao passo que o ecrã em W ao permitir maior flexão absorve mais energia entre prumos.

A avaliação e comparação de flexibilidades realizada até este ponto apenas levou em conta a energia total de deformação no domínio do ecrã, i.e., não foi levado em conta as contribuições das restantes partes do sistema: prumos e molas. A tabela 8.5 mostra a flexibilidade para cada uma das guardas de segurança, ou seja, a energia total de deformação de todo o sistema: ecrã (otimizado ou W), prumos e molas.

Tabela 8.5: Flexibilidade [J] das guardas de segurança com ecrã em W e otimizado

Caso de Carga	Ecrã em W	Ecrã Otimizado	Desvio relativo ao ecrã em W
1	199.290	158.102	-20.67 %
2	824.615	665.280	- 19.32 %
3	339.377	286.064	-10.37 %
4	173.225	167.403	-15.69 %
Soma ponderada das flexibilidades (pesos $w_i = 0.25$), $\sum w_i c_i$	384.126	319.21	-16.89 %

Os resultados obtidos mostram que a guarda de segurança com o ecrã otimizado tem menor flexibilidade (maior rigidez). A energia de deformação acumulada ou absorvida pelos prumos e molas desta guarda segurança é inferior à absorvida pelos prumos e molas da guarda de segurança em W .

Resumindo, as análises efectuadas neste capítulo permitem concluir que os dois ecrãs absorvem uma quantidade de energia equivalente mas de forma diferente. O ecrã em *W* absorve mais energia entre prumos (meio-vão) enquanto o ecrã optimizado absorve mais energia na zona de ligação com os prumos fruto de uma ligação mais rígida. No entanto, uma análise comparativa à capacidade de absorção de energia de cada uma das guardas de segurança (ecrã, prumos e molas incluídos) mostra que a barreira em *W* tem uma capacidade superior à da barreira com o ecrã optimizado (16.89 %). Esta última possui deslocamentos inferiores, entre 22.27% e 32.33%, (ver Tabela 8.1), ou seja, é mais rígida o que origina uma menor deformação dos prumos e das molas.

Do ponto de vista dos picos de acelerações durante o embate do veículo com a guarda de segurança, é expectável que a solução optimizada comparada com o *W* tenha valores mais elevados, pois está foi optimizada com o objectivo de maximizar a rigidez (absorve menos energia). No entanto, tal não significa que o ecrã optimizado não tenha interesse prático pois será adequado para aplicações em pontes e estradas de montanha onde uma deformação excessiva da guarda de segurança em *W* originará uma queda de uma altura considerável trazendo danos corporais maiores aos ocupantes do veículo.

Capítulo 9

Conclusões

e

desenvolvimentos futuros

A presente dissertação constitui uma contribuição para o tema de optimização topológica de perfis com secção transversal constante ao longo do comprimento aplicada a guardas de segurança rodoviária.

Neste trabalho começou-se por estudar o comportamento da guarda de segurança mais comum em Portugal, com perfil em W , em condições idênticas às especificadas pelo teste 11 do *NCHRP Report 350* [15]. Nesta simulação a rigidez do solo foi tida em consideração e foi modelada através de molas não lineares. De forma a simplificar o modelo optou-se por não modelar os absorçores. Os resultados de deslocamento máximo obtidos foram próximos dos apresentados por Ala Tabiei e Jin Wu [8,11].

Uma vez concluída a análise da guarda de segurança em W de uso corrente em Portugal, procedeu-se à programação de um código de optimização de topologia tridimensional de modo a optimizar perfis de secção transversal uniforme ao longo do comprimento. De forma a testar o

programa desenvolvido consideraram-se estudos de caso cuja distribuição de densidades fosse de fácil interpretação, por exemplo, resultados de perfis em forma de “I”, tubo, caixão. Concluído este processo testou-se a influência que a distribuição inicial de densidades tem na solução final encontrada. Os resultados obtidos nesta dissertação mostram que os melhores resultados foram sempre obtidos partindo de uma distribuição uniforme de densidades. Uma vez terminado este último estudo procedeu-se à inclusão de pontos de não *design* no domínio de projecto para testar e observar o comportamento do algoritmo.

Tendo o código sido validado com êxito procedeu-se ao desenvolvimento do tema de fundo desta dissertação, a maximização da rigidez de uma guarda de segurança rodoviária sujeita a um constrangimento de volume. Uma vez que o custo computacional da parte de análise de EF em cada iteração era elevado, optou-se por discretizar a secção transversal por 20 elementos segundo a largura e 40 elementos segundo a altura, impossibilitando assim que fossem utilizadas fracções volúmicas muito baixas. Utilizou-se então uma fracção volúmica de 25 % (o perfil da guarda de segurança em W usado em Portugal tem 5%). Uma vez obtido o perfil optimizado procedeu-se à comparação do mesmo com um perfil em W que tivesse a mesma área de secção transversal. O resultado dessa comparação mostra que a flexibilidade ou a energia total de deformação absorvida pelo ecrã é praticamente a mesma para a solução óptima encontrada e o W (diferença de 1.56 %). Uma análise mais aprofundada dos resultados permitiu avaliar que os dois absorvem de maneira diferente a mesma quantidade de energia de deformação. O ecrã em W, por um lado, tem ligação menos rígida com os prumos o que faz baixar a energia de deformação absorvida nessa zona, por outro lado, absorve mais energia na zona entre prumos (mais flexível). Em contraposição, o ecrã optimizado possui maior rigidez na ligação com os prumos aumentando o nível de energia de deformação absorvida nessa zona enquanto na zona entre prumos absorve menos energia (mais rígido).

Por último, foi analisada a capacidade de absorção de energia da guarda de segurança (ecrã, prumos e molas) constituída por cada um dos perfis. Constatou-se que o perfil optimizado sendo mais rígido que o ecrã em W (deslocamentos inferiores entre 22.27 % e 32.33 %) conduz a uma menor deformação dos prumos e molas e, portanto, a energia total de deformação absorvida é 16.89 % inferior à situação da guarda de segurança com o W.

Este resultado está portanto de acordo com o objectivo desta dissertação, i.e., obter uma guarda de segurança mais rígida. Do ponto de vista das forças dinâmicas transmitidas para os ocupantes do veículo aquando do impacto, uma guarda de segurança com o perfil em W pode ter a vantagem de fazer baixar o nível de acelerações pois é mais flexível. No entanto, uma guarda de segurança mais rígida como aquela optimizada nesta dissertação pode ser mais vantajosa

para o aumento da segurança nas estradas se for colocada em locais tais como pontes ou estradas de montanha onde uma deformação excessiva da barreira poderá originar a queda de um veículo de uma altura fatal.

De futuro seria de interesse estudar o efeito que a modelação do absorçor terá na solução obtida. De forma a obter um resultado mais próximo da realidade seria interessante, num desenvolvimento futuro, proceder à optimização do domínio de projecto modelando também a interacção entre o prumo e o solo com molas não lineares. No entanto, é de referir que a utilização desse modelo vai aumentar consideravelmente o custo computacional de cada uma das análises de elementos finitos necessárias em cada iteração do algoritmo. Nessas condições a paralelização do algoritmo de optimização seria recomendada.

Outros desenvolvimentos futuros de interesse são referentes à modelação do carregamento. Uma metodologia a explorar no futuro seria aplicar cada um dos casos de carga em separado, mas acumulando a deformação que cada um provoca no ecrã. Também é de interesse considerar a utilização de cargas dinamicamente aplicadas.

Por fim refira-se ainda como trabalhos futuros o projecto óptimo de guardas de segurança rodoviária mas com uma formulação alternativa de optimização de topologia. Por exemplo, a maximização da capacidade de absorção de energia da estrutura sujeita a um constrangimento de força e/ou de deslocamento. Para isso deve-se considerar que o deslocamento máximo não pode exceder um certo valor, caso contrário, o veículo acidentado sai da zona pavimentada da via, i.e, a barreira não pode ser demasiado flexível.

Bibliografia

1. Soto, C. A. (2001). Structural topology optimization: from minimizing compliance to maximizing energy absorption, *Internal Journal of Vehicle Design* 25 (1/2): 142-163
2. Pedersen, C. B. W. (2002) Toplogy Design of Frame Structures for Crashworthiness, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Solid Mecanics, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby. The Danish Center fo Applied Mathematics, DCAMM Special Report No. S87
3. Pedersen, C. B. W. (2002) Toplogy optimization of energy absorbing frames, in H. A. Mang, F. G. Rammerstorfer & J. Eberbardsteiner (eds), *Proceedings of the Fifth World Congress in Coputacional Mechanics*, Vienna University of Technology, Austria, p. <http://wccm.tuwien.ac.at>
4. Pedersen, C. B. W. (2003) Topology optimization design of crushed 2D-frames for desired energy absorption history, *Structural and Multidisciplinary Optimization*
5. Pedersen, C. B. W. (2003) Toplogy optimization of 2D-frame structures with path dependent response, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57(10): 1471-1501
6. Bendsøe, M. P. e Sigmund. O (2003) *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*
7. Cichos D., de Vogel, D. , Otto M., Schaar O. e Zölsch S. (2005) Crash Analisis Criteria Description *Crash Analisis Criteria Version 1.6.2*
8. Tabiei, A. e Wu, J. (2000) Roadmap for crashworthiness finite element simulation of roadside safety structures, *Finite Elements in Analysis and Design* 34 (2000) 145-157
9. Norma Francesa NF P 98-411 disponibilizada pela Carcrash

10. Informação disponibilizada pela Carcrash www.carcrash.pt
11. Tabiei, A., e Wu, J.(1999) Validated crash simulation of the most common guardrail system in theUSA, *International Journal of Crashworthiness*, 5: 2, 153 — 168
12. Svanberg, K. (1987) The Method of Moving Asymptotes- A New Method fo Structural Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol.24, 359-373
13. Sigmund, O. (2001) A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21, 120–127
14. Leszek, M. e Leon, K. (2009) Numerical Analysis of Strains and Stresses in Stretched Specimens at Microstructure Level, *Proc. Appl. Math. Mech.* 9, 347 – 348
15. Ross, H. E. JR., Sicking, D. L e Zimmer, R. A., (1993) National Cooperative Highway Research Program Report 350
16. Seckinger, N. R. , Roschke, P. N. , Abu-Odeh, A. e Bligh, R. P.(2005) Numerical simulation of mow strip subcomponents used with strong post guardrail systems, *International Journal of Crashworthiness*, 10: 4, 419 — 427
17. Plaxicco C.,(2002) Design Guidelines for the Use of Curbs and Curb/Guardrail Combinations along High-Speed Roadways, Worcester Polytechnic Institute:Worcester, 307
18. Atahan, Ali O., (2002) Finite Element Simulation of a Strong-Post W-Beam Guardrail System, *SIMULATION* , 78; 587
19. Silva, R. (2007) Modelos para Simulação do Impacto Entre Motociclistas e Barreiras, dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico
20. Manual do utilizador do ANSYS
21. Beer, F.,P, Russell Johnston, E., Jr, e DeWolf, J. Resistência dos Matérias 4^a ed.
22. Hang, J., Choi, K. e Komkov, V. (1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press, INC. Orlando, Florida

23. Doyinx, P., Solution of Topology Optimization Problems with Sequential Convex Programming, Institute of Mechanics and Civil Engineering, University of Liège

Anexo A

Sensibilidade da função objectivo

A matriz de rigidez de um elemento, \mathbf{K}_e pode escrever-se como sendo igual a:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{B} é chamado de operador de gradiente semidiscretizado. Uma vez que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (\text{A.2})$$

em que \mathbf{L} é a matriz dos operadores diferenciais lineares e \mathbf{N} é a matriz das funções de forma, pode escrever-se (A.1) da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L} \mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{N} d\Omega_e \quad (\text{A.3})$$

chamando \mathbf{u} ao vector dos deslocamentos e \mathbf{u}_n ao vector dos deslocamentos nodais e tendo em conta que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_n \quad (\text{A.4})$$

pode escrever-se (A.3):

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_n^T (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{E} \mathbf{N} \mathbf{u}_n d\Omega_e \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_n^T \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u}_n d\Omega_e \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}\mathbf{u}_n)^T \mathbf{L}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u}_n d\Omega_e \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega_e \quad (\text{A.8})$$

tendo em conta que:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

obtém-se que (A.8) é igual a:

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega_e \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{E} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega_e \quad (\text{A.11})$$

uma vez que a sensibilidade da flexibilidade é calculada em ordem à densidade e que de acordo com o modelo SIMP:

$$\mathbf{E} = \rho_e \mathbf{E}^0 \quad (\text{A.12})$$

obtém-se a sensibilidade é igual a :

$$\frac{dc}{d\rho_e} = -p\rho_e^{p-1} \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{E}^0 \bar{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega_e \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{dc}{d\rho_e} = -p\rho_e^{p-1}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T\mathbf{E}^0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\int_{\Omega_e}\mathbf{1}d\Omega_e \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dc}{d\rho_e} = -p\rho_e^{p-1}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T\mathbf{E}^0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\partial\Omega \quad (\text{A.15})$$